

次世代電子陽電子および電子陽子型加速器における 1-loop 効果を用いた超対称性粒子の検証可能性

成蹊大学大学院 理工学研究科 数理解析研究室

國府田優作

2019 年 3 月

Abstract

現代の素粒子論における重要な課題の一つに超対称性理論 (SUSY) の予言する粒子 (超対称性粒子) の実験的検証がある。一方日本に建設予定の ILC は衝突エネルギーが限られていて、数 100GeV 以上の新粒子の直接探索は不可能であることが解っている。そこで本研究では ILC における既知粒子の生成過程における間接検証の可能性に注目した。具体的には、本研究では ILC における fermion 粒子対生成、Z 粒子を伴った Higgs 粒子の生成、neutrino 対を伴った Higgs 粒子の単独生成時の、1-loop level での超対称性粒子のシグナルの大きさを統計的に検証した。同時に相補的に ILC 以外の加速器 (LHeC) で同効果がどのように見えてくるかの検証もおこなった。ILC では、超対称性粒子の 1-loop 効果は見えるという結果を得、第 3 世代の squark に対する情報が得られる可能性があることを明らかにした。

Contents

1	序章	6
2	理論および実験的背景	7
2.1	標準模型	7
2.1.1	標準模型の Lagrangian	7
2.1.2	Higgs Mechanism	8
2.1.3	階層性問題	9
2.2	超対称性理論	9
2.2.1	MSSM	9
2.3	ILC および LHeC の物理	13
2.4	ILC および LHeC における重心系エネルギー	13
3	手法	14
3.1	自動計算ツール	14
3.2	GRACE/SUSY-loop	15
3.3	The calculation scheme	16
3.3.1	Gauge invariance	16
3.3.2	Renormalization scheme	16
3.3.3	1-loop level の断面積	20
4	MSSM パラメータセットの選定	21
4.1	繰り込み群方程式	21
4.2	LHC bound	22
4.3	低エネルギー実験からの制限	26
4.3.1	ミュー粒子異常磁気能率	26
4.3.2	B 中間子希崩壊分岐比	29
4.4	宇宙論からの制限	31
4.5	MSSM の数値パラメーターを制限する観測および実験データ	32
5	1-loop level の断面積	37
5.1	各プロセスにおける期待できるイベント数	37
5.2	fermion 対生成	39
5.2.1	1-loop 補正の必要性および各種数値チェック	39
5.2.2	改良点	41
5.2.3	数値結果 (τ 対生成)	42
5.2.4	数値結果 (bottom 対生成)	45
5.2.5	数値結果 (top 対生成)	46
5.3	Z 粒子を伴った Higgs 粒子の随伴生成	48
5.3.1	1-loop 補正の必要性および各種チェック	48

5.3.2	改良点	49
5.3.3	数値結果	49
5.4	Higgs 粒子の単独生成	51
5.4.1	1-loop 補正の必要性および各種チェック	51
5.4.2	改良点	52
5.4.3	数値結果	56
5.5	LHeC におけるプロセス $e^-P \rightarrow hX$	58
5.5.1	1-loop 補正の必要性および各種チェック	58
5.5.2	PDF の組み込み	58
5.5.3	EWA と PDF の同時組み込み	60
5.5.4	積分方法の考案	62
5.5.5	数値結果	65
5.6	総合的な考察	65
6	結論	67
A	理論的背景の詳細	68
A.1	場の量子論	68
A.2	量子系の時間発展の記述	68
A.3	S 行列と伝播関数	68
A.4	ビーム強度を考慮した相互作用	71
A.5	摂動論による計算	72
A.6	Feynman 則	73
B	標準模型の歴史と描像	74
B.1	電磁気力	74
B.2	発散問題	75
B.3	強い力	75
B.4	quark 模型	76
B.5	弱い力	76
B.6	対称性の破れと宇宙史	77
C	超対称 Lagrangian	79
C.1	最も簡素な超対称模型	79
C.2	chiral supermultiplet の相互作用	83
C.3	gauge supermultiplet の Lagrangian	86
C.4	超対称的な gauge 相互作用	88
C.5	超対称性の破れ	90
D	暗黒物質の MSSM における熱平衡	94

謝辞

この博士論文の執筆にあたり、内容面で忍耐強く僕を導いてくださった近先生、プログラミングや事務的な面でご尽力いただいた小柳先生、柳生先生、植田先生、審査において貴重な時間を割いて本論文に目を通してくださった、富谷先生、中野先生、青柳先生、進藤先生、共に成長した数理解析研究室のメンバーに心から感謝の意を表します。

また、主要研究論文の掲載まで、細部にわたるアドバイスをくださった栗原先生、神保先生、加藤先生、黒田先生、石川先生に、感謝の意を表します。

1 序章

gauge 対称性を持つ相対論的量子場理論は、対称性という概念を拡張した場の量子論の一つの発展形である。Paul Dirac による Dirac 方程式の発見 [1] 以来、理論の構築及び実験による検証を繰り返して素粒子現象の理解に適用されてきた。様々な議論が前世紀中にすでになされたが、この理論体系において現在理解されたことは、標準模型 (SM) という形でまとめあげられている。標準模型の予言する粒子が少なくともすべて「存在する」ことは 2012 年 Higgs 粒子の発見 [2, 3] によって、その最後のピースが埋められたことで確認された。

標準模型という道具を用いることにより、現在の素粒子実験 (大型加速器による衝突実験) の結果は、驚くべき精度で予言することができる。標準模型が優れているという理解に到達するまでには様々な模型が提唱されていたが、それらの模型に決定的に含まれていなかった要素が、対称性、および対称性の破れ、という観点である。

Higgs 粒子はその存在が確認されたわけであるから、対称性の破れが働いて、現在の宇宙の静的な「冷えた」構造ができたと考えられる。現在の宇宙は、すなわち完璧な対称性を持った動的、熱的な宇宙がその自発的対称性の破れによって、「質量をもった」極めて安定的な構造を持つ現在の宇宙に変化したものだということを我々は理解したわけである。前者と後者はそれぞれ Planck スケール ($M_p = 10^{19}$ GeV) および Weak スケール ($M_{\text{weak}} = 10^2$ GeV) で特徴づけられる。しかしながら、 M_{weak} で記述される標準模型は一つの有効理論であって、限界のない理論ではない。例えば、測定された Higgs 粒子の質量 125 GeV を説明するためには理論に含まれる数値パラメータを極端に微調整 (fine tuning) することが必要になってくる。具体的には $\mathcal{O}(M_p)$ 同士の理論パラメータの相殺によって $\mathcal{O}(M_{\text{weak}})$ の物理量を導出することになる。このような極端な微調整が不要な模型の一つとして最小超対称標準模型 (MSSM) が知られている。この模型は標準模型の超対称的な最小限の拡張模型である。この模型では、標準模型の予言する粒子に対して「超対称パートナー」と呼ばれる粒子が対になって存在し、この仮定によって Higgs 粒子の質量の量子補正を計算するうえでの二次発散を相殺することができる。本研究では、現時点での各種の観測、実験結果を考慮し、特徴的な MSSM パラメータセットの選定を行った。さらにそれらを用いて、次世代電子陽電子および電子陽子型加速器における特徴的な粒子生成過程に対する SM および MSSM の枠組みでの 1-loop 補正計算を行った [4] [5]。その結果から MSSM の効果が 1-loop level で検証可能かどうかを解析した。

MSSM のフリーパラメータのスペクトラムを絞り込む目的は実際の物理量を現象論的に予測するためであるが、本研究ではこの対象を ILC 実験および LHeC 実験とした。1-loop での断面積の計算には GRACE [6, 7] を用いた。本研究では MSSM での Higgs の質量の計算およびミュー粒子異常磁気能率や B 中間子稀崩壊分岐比の計算及び MSSM のパラメータセットの選定のために SuSpect2 というプログラムパッケージを用いた [8]。これを用いることにより 2-loop level で Higgs の質量を計算することができた。また暗黒物質の熱的残存量を計算するために MicroMEGAs [9] を用いた。なお ILC での fermion 対生成、Higgs 粒子生成、LHeC での Higgs 粒子生成については先行研究 [10],[11],[12] と同じパラメータ設定の下での、数値結果の一致を確認している。本研究のオリジナリティは現代の現象論

的な課題をクリアした MSSM パラメーターで計算を行ったことであり、このようなパラメーター設定についての詳細も述べられる。

本論文は研究背景が述べられる第 2 章、および研究手法と MSSM のパラメーターの選定について述べられる第 3 ~ 4 章, 結果が述べられる 5 章および結論が述べられる第 6 章から構成される。

2 理論および実験的背景

2.1 標準模型

2.1.1 標準模型の Lagrangian

標準模型の Lagrangian は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SM}} = & -1/4G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - 1/4W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - 1/4B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
 & + \bar{Q}i\gamma^\mu D_\mu Q + \bar{L}i\gamma^\mu D_\mu L \\
 & + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R + (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) \\
 & + \left\{ Y_u \bar{Q} \tilde{\Phi} u_R + Y_d \bar{Q} \Phi d_R + Y_e \bar{L} \Phi e_R + H.c. \right\} \\
 & - \lambda(\Phi^\dagger\Phi - 1/2v^2)^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

と書くことができる事が知られている。これを役割ごとに分類すると

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} - V_{\text{Higgs}} \tag{2.2}$$

ということが出来る。場の量子論 [付録 A.1 参照] として理論を理解するために必要な要素は次の 4 要素である。

- 1 いかなる粒子を持つか
- 2 いかなる対称性を持つか
- 3 相互作用の記述ができるか
- 4 質量を説明できるか

標準模型は、quark, lepton, Higgs 粒子という 3 種類の粒子を持っている。また、 $U(1), SU(2), SU(3)$ という 3 つの gauge 対称性を持っている。 \mathcal{L}_{kin} は最初の 3 行に相当する。これは fermion-fermion-vector タイプの相互作用つまり「gauge 相互作用」を扱う。次の 1 行 $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ は fermion-fermion-scalar タイプの相互作用つまり Yukawa 相互作用を記述する。最後の 1 行が V_{Higgs} つまり Higgs ポテンシャルを記述する。この部分で素粒子の質量が説明される。この理論の詳細は本研究の本題から外れるので、ここでは 4 の質量獲得のメカニズムについてのみ詳細を記したい。

2.1.2 Higgs Mechanism

ここで Abelian $U(1)$ gauge 理論に, Higgs メカニズムを適用することを例にとって標準模型における素粒子の質量獲得の仕組みを定義したい。Abelian での例は非 Abelian も含む理論にも一般化することができる。

$U(1)$ gauge 対称性をもった光子の運動項は

$$\mathcal{L}_{kin} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

と表すことができここで、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.4)$$

である。これが \mathcal{L}_{kin} が変換 $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \eta(x)$ の下で不変であることを表す。もし素朴に質量項を「手で」加えるなら Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 1/2 m^2 A_\mu A^\mu \quad (2.5)$$

となる。これを行うと局所 gauge 対称性が破れてしまう。 $U(1)$ gauge 理論はこのような理由で光子を massless にしているのである。今、模型を電荷 ($-e$) を持つ複素 scalar 場を導入することで拡張したい。

$$\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (2.6)$$

ここで, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, $V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$ である。ここで gauge 変換を

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \eta(x), \quad \phi(x) \rightarrow e^{ie\eta(x)} \phi(x) \quad (2.7)$$

と置けば、Lagrangian を不変にすることは容易にできる。もし $\mu^2 < 0$ ならば、最小エネルギー状態は $\phi = 0$ であり、ポテンシャルは Lagrangian の対称性を保存する。このとき、この理論は最も簡単な QED であり、massless の光子と質量 μ の scalar 場 ϕ を持っている。しかしながら、もし、 $\mu^2 > 0$ ならば、場 ϕ は真空期待値 (VEV) を持つことを要求され、

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

であり、大域的に $U(1)$ gauge 対称性が自発的に破れる。この時の ϕ を次のようにパラメータ化できる。

$$\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}} e^{i\chi/v} \quad (2.9)$$

ここで h と χ はそれぞれ Higgs 粒子と Goldstone boson を表す。これらは VEV を持たない実数の scalar 場である。これを Lagrangian に置き換えて入れれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - evA_\mu \partial^\mu \chi + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu \\ & + 1/2 (\partial_\mu h \partial^\mu h - 2\mu^2 h^2) + 1/2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \\ & + (h, \chi \text{ 相互作用項}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。この Lagrangian は今や質量 ($m_A = ev, m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$) の (光子, Higgs) および massless の Goldstone boson を記述することができる。このようなアイデアを非 Abelian gauge 理論にまで一般化したものが、「標準模型」である。

2.1.3 階層性問題

Higgs Mechanism を伴った標準模型は高い対称性とその破れを記述するので、非常に「美しい」理論と呼べるかもしれないが、多くの物理学者たちはそれを、「素粒子の最終理論」と見なしてはいない。むしろ、低エネルギー領域での有効理論と見なしている。そして高エネルギー領域でのより基本的な理論が存在すると信じている。このような立場に立って、Higgs 粒子の質量を導出する上での「不自然さ」について論じる。Dirac fermion 場 Ψ からの量子補正を受けた標準模型の Higgs 粒子の質量に対する 1-loop 補正を

$$\Delta m_{h,fermion}^2 = -\frac{k^2}{8\pi^2} M_p^2 + \mathcal{O}(\log M_p) \quad (2.11)$$

scalar boson 場 Φ からの量子補正を受けた標準模型の Higgs 粒子の質量を

$$\Delta m_{h,scalar}^2 = \frac{k_s^2}{16\pi^2} M_p^2 + \mathcal{O}(\log M_p) \quad (2.12)$$

とするとき、標準模型は $k \sim 1$ の fermion、つまり「top quark」を持つが、Higgs 粒子自身以外の scalar boson は量子補正に寄与しない。このため Δm_h^2 は M_p 自身のオーダーになってしまう。次の等式、

$$m_h^2(\text{physical}) = m_h^2(\text{bare}) + \Delta m_h^2 \quad (2.13)$$

の左辺が 10^4 GeV と観測されたことによって、これを実現できるように右辺第 1 項の $\mathcal{O}(M_p)$ のフリーパラメーターを恣意的に選ぶ必要がある、ということが問題なのである。

2.2 超対称性理論

本章では超対称性理論、特に最小超対称標準模型 (MSSM) の理論的な枠組みについて概説する。

2.2.1 MSSM

supersymmetric な Lagrangian の一般形は以下のように書ける事が知られている。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}' + \mathcal{L}'' + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (2.14)$$

ここで、

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \sum_i (D_\mu S_i)^\dagger (D^\mu S_i) + i/2 \sum_i \bar{\psi}_i \not{D} \psi_i - 1/4 \sum_A F_{\mu\nu A} F_A^{\mu\nu} + i/2 \sum_A \bar{\lambda}_A \not{D} \lambda_A \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}' = - \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2 - 1/2 \sum_{i,j} \bar{\psi}_i 1/2 (1 - \gamma_5) \left[\frac{\partial W}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right]_{\hat{S}=S} \psi_j + h.c. \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}'' = -\sqrt{2} \sum_i [S_i^\dagger(t_A) \bar{\psi}_i 1/2(1 - \gamma_5) \lambda_A + h.c.] - 1/2 \sum_A [\sum_i S_i^\dagger t_A S_i]^2 \quad (2.17)$$

\mathcal{L}' は W で定義され、W を super potential とよぶ。超対称性理論では、W がどう書かれるかによってどの模型かが決まる。MSSM では

$$\begin{aligned} W &= g_e \hat{H}_d \hat{L} \hat{E}^c + g_d \hat{H}_d \hat{Q} \hat{D}^c + g_u \hat{H}_u \hat{Q} \hat{U}^c + \mu \hat{H}_u \hat{H}_d \\ &= g_e (\hat{H}_1^1 \hat{E} \hat{E}^c - \hat{H}_1^2 \hat{N} \hat{E}^c) + g_d (\hat{H}_1^1 \hat{D} \hat{D}^c - \hat{H}_1^2 \hat{U} \hat{D}^c) \\ &\quad + g_u (\hat{H}_1^1 \hat{D} \hat{U}^c - \hat{H}_1^2 \hat{U} \hat{U}^c) + \mu (\hat{H}_1^1 \hat{H}_1^2 - \hat{H}_1^1 \hat{H}_2^1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

ととられる。ここで、各 chiral 超場は表 1 に与えられている。また $F_{\mu\nu}^A$ および λ^A で表される各 vector 超場は表 2 に記載した。u-type squark を例にとって超対称模型の粒子質量がどのように導出されるかを見ていく。出発点として sfermion のポテンシャルが

$$\sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2 + 1/2 \sum_A [\sum_i S_i^\dagger t_A S_i]^2 + V_{ssb} \quad (2.19)$$

と書けることを前提とする。ここで ssb とは soft susy breaking のことを指す。まず、super-potential W の微分を考えると、

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \hat{U}} \right|_{\hat{S}=S} = -g_u H_2^2 \tilde{u}_R^* \rightarrow -g_u v_2 \tilde{u}_R^* \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \hat{U}^c} \right|_{\hat{S}=S} = -g_u H_2^2 \tilde{u}_L \rightarrow -g_u v_2 \tilde{u}_L \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \hat{H}_2^2} \right|_{\hat{S}=S} = -g_u \tilde{u}_L \tilde{u}_R + \mu H_1^1 \rightarrow -g_u \tilde{u}_L \tilde{u}_R^* + \mu v_1 \quad (2.22)$$

項 $\sum \left| \frac{\partial W}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2$ より、

$$V_1^{\tilde{u}} = g_u^2 v_2^2 |\tilde{u}_r|^2 + g_u^2 v_2^2 |\tilde{u}_L|^2 - g_u v_1 \mu (\tilde{u}_L^* \tilde{u}_R + h.c.) = m_u^2 (|\tilde{u}_L|^2 + |\tilde{u}_R|^2) - m_u \mu \cot \beta (\tilde{u}_L^* \tilde{u}_R + h.c.) \quad (2.23)$$

ここで $m_u = g_u v_2 \tan \beta \equiv v_2/v_1$ である。ポテンシャルの第 2 項より、

$$V_2^{\tilde{u}} = 1/8 g_2^2 [\tilde{Q}^\dagger \tau^a \tilde{Q} + H^\dagger \tau^a H]^2 + 1/8 g_1^2 [\tilde{Q}^\dagger Y_Q \tilde{Q} + H_1^\dagger + H_2^\dagger + \tilde{u}_R^* Y_u \tilde{u}_R]^2 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{a=1}^3 \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a = 2\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \\ & \rightarrow 1/4 g_2^2 (v_1^2 - v_2^2) |\tilde{u}_L|^2 - 1/4 g_1^2 (v_1^2 - v_2^2) (Y_Q |\tilde{u}_L|^2 + |Y_u|) \\ & = 1/4 (v_1^2 - v_2^2) (g_2^2 - Y_Q g_1^2) |\tilde{u}_L|^2 - 1/4 (v_1^2 - v_2^2) g_1^2 Y_u |\tilde{u}_R|^2 \\ & = m_Z^2 \cos(2\beta) Q_u \sin^2 \theta_W |\tilde{u}_R|^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここで、 $m_Z^2 = 1/2(g_1^2 + g_2^2)(v_1^2 + v_2^2) \sin^2 \theta_W = g/(g_1^2 + g_2^2)$,
 $\cos(2\beta) = (v_1^2 - v_2^2)/(v_1^2 + v_2^2)$, $q_u = 1/2 + y_Q/Z = -Y_u/2$ である。また、

$$\begin{aligned} V_{ssb}^u &= m_Q^2 |\tilde{u}_L|^2 + m_u^2 |\tilde{u}_R|^2 - g_u A_u H_2^2 (\tilde{u}_L \tilde{u}_R^* + \tilde{u}_R \tilde{u}_L^*) \\ &= m_Q^2 |\tilde{u}_L|^2 + (\tilde{u}_L \tilde{u}_R^* + \tilde{u}_R \tilde{u}_L^*) - m_u A_u (\tilde{u}_L \tilde{u}_R^* + \tilde{u}_R \tilde{u}_L^*) \end{aligned} \quad (2.26)$$

これらの式より、

$$\mathcal{L}_{\tilde{u}}^{\text{mass}} = (\tilde{u}_L^*, \tilde{u}_R^*) \begin{pmatrix} m_{\tilde{u}_L}^2 & a_u m_u \\ a_u m_u & m_{\tilde{u}_R}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

という「質量行列」が導かれる。この時

$$m_{\tilde{u}_L}^2 = m_Q^2 + m_Z^2 \cos(2\beta) (1/2 - Q_u \sin^2 \theta_W) + m_u^2 \quad (2.28)$$

$$m_{\tilde{u}_R}^2 = m_u^2 + m_Z^2 \cos(2\beta) Q_u \sin^2 \theta_W + m_u^2 \quad (2.29)$$

$$a_u = -A_u - \mu \cot \beta \quad (2.30)$$

であり、この行列を対角化することにより、 $\tilde{f} = \tilde{t}$ の場合、質量固有状態が

$$(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = (\cos \theta_t \tilde{t}_L - \sin \theta_t \tilde{t}_R, \sin \theta_t \tilde{t}_L + \cos \theta_t \tilde{t}_R) \quad (2.31)$$

固有値が

$$m_{\tilde{t}_1 \tilde{t}_2}^2 = 1/2 \{ m_{\tilde{t}_L}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2 \pm [(m_{\tilde{t}_L}^2 - m_{\tilde{t}_R}^2)^2 + 4a_t^2 m_t^2]^{1/2} \} \quad (2.32)$$

と求められる。これが超対称模型における粒子質量の定義である。また chargino を例にとれば gaugino の質量は

$$\mathcal{L}_{\text{chargino}}^{\text{mass}} = (\bar{\tilde{W}}, \bar{\tilde{H}}) [M_{ch} P_L + M_{ch}^T P_R] \begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

と表される。ここで $\bar{\tilde{W}} \equiv (i/\sqrt{2})(\tilde{W}^1 + i\tilde{W}^2)$, $\bar{\tilde{H}} \equiv i(P_L \psi_{H_1}^- + P_R \psi_{H_2}^+)$ である。このとき質量行列 M_{ch} が

$$M_{ch} = \begin{pmatrix} M_2 & g_2 v_1 \\ g_2 v_2 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

である。このときの固有状態を $(\tilde{W}, \tilde{H}) \rightarrow (\chi_2, \chi_1)$ と表し固有値は

$$m_{\chi_2, \chi_1}^2 = 1/2 [(\mu^2 + 2m_W^2 + M_2^2 \pm \xi)] \quad (2.35)$$

である。ここで $\xi^2 \equiv (\mu^2 - M_2^2) + 4m_W^2 (m_w^2 \cos^2 2\beta + \mu^2 + M_2^2 + 2\mu M_2 \sin 2\beta)$ である。また neutralino の質量行列は

$$M_{ne} = \begin{pmatrix} 0 & (\text{symmetric}) & (\text{symmetric}) & (\text{symmetric}) \\ \mu & 0 & (\text{symmetric}) & (\text{symmetric}) \\ -g_2 v_2 / \sqrt{2} & -g_2 v_1 / \sqrt{2} & M_2 & (\text{symmetric}) \\ -g_1 v_2 / \sqrt{2} & -g_1 v_1 / \sqrt{2} & 0 & M_1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

と4行4列で表されることが知られているが、これは解析的に求められないので、数値計算で求める。

前述したように定義される質量をもった超対称粒子は以下の表 1、および表 2 に挙げた数だけある。

表 1: MSSM の Chiral supermultiplet。spin-0 場は複素 scalar 粒子を、スピン 1/2 場は左巻き 2 成分 Weyl fermion を表す。

Names		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks, quarks ($\times 3$ families)	Q	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	U^c	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	D^c	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons ($\times 3$ families)	L	$(\tilde{\nu} \tilde{e}_L)$	(νe_L)	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	E^c	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, Higgsinos	H_u	$(H_u^+ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

表 2: MSSM の gauge supermultiplets。

Names	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm \tilde{W}^0$	$W^\pm W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B boson	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

2.3 ILC および LHeC の物理

ILC とは国際協力の下で建設が計画されている電子陽電子衝突型線形加速器である [18]。この計画が持ち上がっているのには科学的な理由があり、人類の知を次の level へステップアップさせるのに必須であるということをも主張する物理学者が数多くいる。まず、標準理論を超える物理の可能性を探る上で、クリーンにシグナルを返してくれる加速器というものが待ち望まれている。LHC は最も高い衝突エネルギーを持つマシンであることは間違いないが、quark、gluon からなる複合粒子である陽子の衝突からは、崩壊する粒子のカスケードを伴う複数の jet が生成される。これを解析する手法についての研究は挑戦的であり、魅力的であるため、貴重で多大な努力をもって盛んに行われている。現在 LHC 実験の結果として、損失エネルギーを伴う新粒子探索に用いることができるのは横方向のトランスバースエネルギーと呼ばれる物理量の解析である。これは、ビームの入射方向と垂直であるために、エネルギー保存則を考えたときに、総和が 0 になるために、数値解析がしやすいためである。LHC の縦方向の生成事象を「捨てている」ような状況を改善するための一つ方向性として、jet の解析があるのだが、これとは別に、生成された事象をほとんどそのまま解析に使えるようにマシンを設計してしまえないか、ということが ILC 計画が持ち上がった大きな理由である。このためには、衝突させる粒子は構造を持たない電子と陽電子が最適であり、非常に効率の良いマシンが期待できる。乗じて、これまでの日本の加速器設計の経験を生かせば高いルミノシティを実現することもできる。このようなマシンが実現すれば、標準模型を超える物理を探るのに、十分な精度を実現することができる可能性もあると考えられており、本研究の研究対象である、超対称性理論はこの「標準模型を超える物理」に該当する。

LHeC とは、現在計画段階の次世代電子陽子衝突型加速器である。LHC の陽子ビームと、新しく建設された電子加速器を組み合わせ、7 TeV の陽子ビーム、60 GeV の電子ビームの衝突を想定している。先行した電子陽子衝突型加速器 HERA よりも高い重心系エネルギーおよびルミノシティでの稼働が計画されている。放射光を出し終えて不要になった電子ビームのエネルギーを、超伝導加速器を通して回収し、次の電子ビームを加速するために利用する ERL(Energy Recovery Linac) というシステムが利用される。線形加速器と周回リングを持ち、60 GeV まで電子を加速し、衝突に使われなかった電子はリングを周回し減速され、そのエネルギーが次の加速に使われる。非対称な検出器設計を持つ。陽子ビーム方向はよりビーム軸に近い所まで検出感度がある。

2.4 ILC および LHeC における重心系エネルギー

これまでの章では、素粒子の相互作用についての理論的枠組みについて主に解説したので、量子論的な特質について扱ってきたが、ここではより基本的な運動学が素粒子論でどのように扱われるかについて少しだけ触れておく。一般的に言って素粒子論は今のところ重力を扱う理論体系ではないため、ここでの相対論は特殊相対論を指す。これは描像としては、4次元の時空間の中を移動する自由粒子同士が衝突する運動学である。相互作用として何が起こるかは、相対論のみでは記述できないのであるが、それこそこの何が起こる

かこそが、本研究の結論になる。一方でそれ以前の制御できる部分の設定を段階的に変化させたときにどのような分布がみられるかを探ることもできる。ここからある結論を引き出すこともできる。基本的にここで触れておきたい量はただ一つで、 \sqrt{s} と呼ばれる、マンデルスタム変数の一つの s の根号をとった量である。根号がついている理由はこの量が 4 元運動量の和の二乗として定義されるからである。以下のローレンツ不変量を定義する。

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (2.37)$$

ここで p_1, p_2 はそれぞれ始状態の粒子 1, 2 の 4 元運動量である。一般的な議論ではなく、ILC での場合の本研究に直結した側面を見ることにする。ILC では始状態粒子は電子 (electron) と陽電子 (positron) であるから、 $p_1 = (E_e, 0, 0, P_{ez}), p_2 = (E_p, 0, 0, P_{pz})$ と書けるだろう。次に 4 元運動量が満足すべき等式 $E^2 - P^2 = m^2$ を合わせて考える。ここで、electron や、positron の質量は終状態で生成される Higgs の質量 125 GeV に比べれば、ほとんど無視できる値なので、Massless 近似というものを考える。すると始状態運動量は $E^2 = P^2$ より

$$p_1 = (E_e, 0, 0, E_e), p_2 = (E_p, 0, 0, -E_p) \quad (2.38)$$

となるだろう。これを展開し s の定義に当てはめれば、

$$s = 4E_e E_p \quad (2.39)$$

である。この後の議論での重心系エネルギーは全てこの関係で議論する。

3 手法

3.1 自動計算ツール

素粒子の相互作用の摂動展開の高次の項まで含めた計算を行うと実験結果を説明できる精度が飛躍的に上がる。これを正確に計算するためには、非常に高度な処理能力を備えた計算機が必要であり、人間の能力のみでは実行できないことが現在では知られている。数十年前までは、ある物理量を手計算するために、どのような量を残し、どのような量を切り捨てるか見積もり、手計算を完成させることが、素粒子現象論分野の研究テーマであった時代もある。しかし今や我々は途方もない処理能力を備えた CPU を搭載したマシンを手に行っている。この処理能力を駆使すれば、摂動の 2 次以降の計算を何ら切り捨てることなく「全て」計算できるはずである。これを実行できるようなソフトウェアの開発は、実際に数十年前から持ち上がっており、おそらく様々な計画が持ち上がっていたはずである [13][14][15]。そのような中で日本で生き残った自動計算システムの一つが GRACE system である。GRACE システムの優れている点は SM 版で、非線形ゲージ固定項を導入して強力なシステムチェックができること、およびイベントジェネレーターとして利用できる事である。また電弱相互作用の 1-loop 計算ができるということも特徴の一つである。またソフトウェア毎に用いている繰り込みのスキームが違っており、GRACE では on-shell スキームを用いている。

3.2 GRACE/SUSY-loop

GRACE は MSSM のパラメーターをインプットにし、崩壊幅や断面積をアウトプットにする。Lagrangian から物理量を求める手続きはアルゴリズムとしては変更の余地は少ない。計算のたびにこの部分から作り直しては、時間がいくらあっても足りないだろう。変更の余地が大きいのはこのアルゴリズムに代入する数値、つまり MSSM 粒子の質量である。

素粒子論模型はその理論的枠組みそれ自体は、インプットパラメーターの数値を決定する仕掛けを持たない。そのために約 50 個（数え方による）に上るインプットパラメーターの数値を「推定」して代入する必要がある。この推定について非常に筋のいい考え方ができれば、それだけで学術的な価値が認められることさえある。この点については次の Subsection で詳しく議論するとして GRACE で実際何を行うかについて詳しく解説しよう。

まず最初に計算する物理量を決めなければならない、ということに異論はないだろう。標準模型および MSSM のすべての粒子を始状態、終状態に選ぶことができるので、基本的な運動学（エネルギー保存則、運動量保存則、R-パリティの保存など）に反することがなければ、LHC や ILC で考えられまたは行われているものはどんなものでも計算できる。これを指定して読み込む最初のインプットカードを書くのが基本である。これを書いた後数回コードをたたくとあり得るすべての Feynman ダイアグラムをユーザーは手に入れることができる。先に触れた Feynman 伝播関数は 2 次のオーダーにおいては、内線と呼ばれる「仮想粒子」を表し、この組み合わせのパターンは数十から数万ある。つまり数十から数万通りのダイアグラムを、この段階でグラフィカルに出力することもできる。次に指定した物理量の計算を実行するための Fortran ファイルを自動生成する。これをコンパイルし、実行すれば観測可能量（つまり崩壊幅や断面積 σ ）が計算される。

ここで問題となるのは 2 次の摂動展開における計算では、Feynman 伝播関数が複雑に関与してくるためその分母にある、粒子質量の組み合わせ（つまり「推定し代入した」値）によって計算が数値的に発散する場合が非常に多い、ということである。計算結果が意味のある値ではないときユーザーはその可能性をチェックしなければならない。また、現在素粒子の理論として意味のある理論は「繰り込み可能」でなければならないことが知られている。繰り込みという概念は、手計算だけの時代に、やはり物理量を具体的に計算するにあたり発散を防ぐという目的で導入されたもので、Lagrangian の中に新たなパラメーターを含む項（カウンター項）を追加するという「処方」である。意味のある物理量を導くためには繰り込みという操作を行わなければならない。繰り込みという操作は GRACE で自動的に行われるようになっているが、これが正しく行われているかをチェックしなければならない。また計算結果が特定の gauge の取り方に依存しない (gauge invariant) かどうかも確かめる必要がある。実は、GRACE システムではこれらのチェックのうちのいくつかを系統的に行うことができるようになっている [16]。このために依存性を調べたいパラメーターの値を変化させて結果を比較する。例えば計算結果が gauge 不変性を実現しているかどうかを確認するには、gauge パラメーターを 2 通りにとって計算結果を比較すればいいのだが、tree 版では微分断面積の値は必ず別々の gauge パラメーターで計算された結果が対になって出力されてくる。つまり出力を得たときに、自動的に gauge 不変な結果

であるかどうか確認できるようになっているのである。

ここまでをまとめると

- (1) GRACE では初めに運動学を指定する。それを指定するとすべてのダイアグラムは容易に得られる。
- (2) 繰り込みがうまく機能しているか、gauge 不変性を実現できているかを確認する必要がある。
- (3) これらの可能性を数値的にチェックする方法がある。

3.3 The calculation scheme

3.3.1 Gauge invariance

gauge 固定はもともと理論的研究の側面から考えられたものであるが、数値計算という側面から言えば非線形 gauge を用いると、プログラムしたアルゴリズムに不具合がないかどうかについて、多くのことを知ることができる。

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} \quad (3.40)$$

この第3項は gauge 対称性を破る、という役割が実際に与えられている。

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{\xi_W} |F_W^+|^2 + \frac{1}{\xi_Z} |F_Z|^2 + \frac{1}{\xi_\gamma} |F_\gamma|^2 \quad (3.41)$$

各項は次のように記述される。

$$F_W^\pm = (\partial_\mu \pm ie\tilde{\alpha}A_\mu igc_W\tilde{\beta}Z_\mu)W^{\pm\mu} \pm i\xi_W\frac{g}{2}(v + \tilde{\delta}_H H^0 + \delta_h h^0 \pm i\tilde{\kappa}G^0)G^\pm$$

$$F_Z = \partial_\mu Z^\mu + \xi_Z\frac{g_Z}{2}(v + \epsilon_H H^0 \pm \epsilon_h h^0)G^0$$

$$F_\gamma = \partial_\mu A^\mu \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

この中の $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}_h, \tilde{\delta}_H, \tilde{\epsilon}_H, \tilde{\epsilon}_h, \tilde{\kappa}$ を non-linear-gauge(NLG) パラメーターと呼ぶ。

3.3.2 Renormalization scheme

場の量子論、とくに量子電磁気学以降の相互作用を扱った理論を用い、観測量を理論予想する際には、無限大の計算結果が生じる。これを「繰り込み処方」と呼ぶ非常にテクニカルな方法で相殺すると有限の結果が得られ、観測量と照らし合わせることができる。繰り込み処方の方法論としてよく知られているのは「on shell 繰り込み」と「minimal subtraction(MS) scheme] であるが、GRACE で採用されているのは「on shell 繰り込み」である。まず定義されている「繰り込み定数」をチェックすると、Standard model sector で

は、

$$\begin{aligned}
\text{gauge bosons} \quad & \vec{W}_{\mu 0} = Z_W^{1/2} \vec{W}_\mu, \\
& B_{\mu 0} = Z_B^{1/2} B_\mu, \\
& g_{\mu 0} = Z_{\text{gluon}}^{1/2} g_\mu, \\
\text{gauge couplings} \quad & g_0 = Z_g Z_W^{-3/2} g, \\
& g'_0 = Z_{g'} Z_B^{-3/2} g', \\
& g_{s0} = Z_{g_s} Z_{\text{gluon}}^{-3/2} g_s, \\
\text{fermions} \quad & \Psi_{fL_0} = Z_f^L{}^{1/2} \Psi_{fL}, \quad f = u, d, \dots, \nu_e, e, \dots, \\
& \Psi_{fR_0} = Z_f^R{}^{1/2} \Psi_{fR}, \quad f = u, d, \dots, e, \dots, \\
& m_{f_0} = m_f + \delta m_f, \quad f = u, d, \dots, e, \dots. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

1 種類の fermion について 9 種類の繰り込み定数が、SUSY sector では、

$$\begin{aligned}
\text{Higgs bosons} \quad \mathbf{H}_{i0} &= Z_{H_i}^{1/2} \mathbf{H}_i, & i = 1, 2, \\
v_{i0} &= Z_{H_i}^{1/2} (v_i - \delta v_i), & i = 1, 2, \\
m_{i0}^2 &= Z_{H_i}^{-1} (m_i^2 + \delta m_i^2), & i = 1, 2, \\
(m_{12}^2)_0 &= Z_{H_1}^{-1/2} Z_{H_2}^{-1/2} (m_{12}^2 + \delta m_{12}^2), \\
\\
\text{sfermions} \quad \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}_0 &= \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{\tilde{f}_1 \tilde{f}_1}^{1/2} & Z_{\tilde{f}_1 \tilde{f}_2}^{1/2} \\ \tilde{Z}_{\tilde{f}_2 \tilde{f}_1}^{1/2} & Z_{\tilde{f}_2 \tilde{f}_2}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} & f = u, d, \dots, e, \dots, \\
\\
(\tilde{\nu}_i)_0 &= Z_{\tilde{\nu}_i}^{1/2} \tilde{\nu}_i, & i = e, \mu, \tau, \\
(m_{\tilde{f}_i}^2)_0 &= m_{\tilde{f}_i}^2 + \delta m_{\tilde{f}_i}^2, & f = u, d, \dots, e, \dots, \\
& & i = 1, 2, \\
(m_{\tilde{\nu}_i}^2)_0 &= m_{\tilde{\nu}_i}^2 + \delta m_{\tilde{\nu}_i}^2, & i = e, \mu, \tau, \\
(\theta_f)_0 &= \theta_f + \delta \theta_f, & f = u, d, \dots, e, \dots, \\
\text{gaginos} \quad \vec{\lambda}_0 &= Z_{\lambda^w}^{1/2} \vec{\lambda}, \\
\lambda_0 &= Z_{\lambda}^{1/2} \lambda, \\
\tilde{\mathbf{H}}_{i0} &= Z_{\tilde{H}_i}^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}_i, & i = 1, 2, \\
\tilde{g}_0^\alpha &= Z_{\tilde{g}}^{1/2} \tilde{g}^\alpha, \\
\mu_0 &= \mu + \delta \mu, \\
M_{10} &= M_1 + \delta M_1, \\
M_{20} &= M_2 + \delta M_2, \\
M_{30} &= M_3 + \delta M_3, \quad (m_{\tilde{g}0} = m_{\tilde{g}} + \delta m_{\tilde{g}}) \quad (3.45)
\end{aligned}$$

1 種類の fermion に対して 34 種類の繰り込み定数が定義されている。これはこれと同じ数の発散部分をキャンセルするために導入されているのであるが、理論に新たなパラメータを導入する以上、何らかの条件を課さなければ、完全な任意パラメータをこの数だけ追加することになってしまうだろう。次のように元々あったパラメーター m

$$m \rightarrow m_0 = m_R + \delta m \quad (3.46)$$

に対しその「裸の値」(m_0) が発散しない部分 m_R と発散部分 δm に分けることができる、と考えるとき、発散を押しつけた部分 δm も、さらに発散部分と発散しない部分に分けられるが、この部分全体のパラメータを定義するこの条件に on-shell 条件を課すのが「on-shell 繰り込み」で、「Minimal-subtraction」では、発散パートのみをなくすことを考える。GRACE では、MSSM 版ではこの繰り込み条件に「on-shell」条件を採用し consistent な繰り込みスキームが確立されているが、SM の QCD 補正においては、この手法での計

算方法が確立されていないため、この寄与が欲しい場合には特別な措置をしなければならない。これについては後の章で触れる。

3.3.3 1-loop level の断面積

MSSM は場の量子論として矛盾のない理論であるため、これを用いて量子補正の計算が可能である。量子補正の計算について実際に計算する物理量として選択したのは、ILC における fermion 対生成、Z 粒子の随伴生成を伴った Higgs 粒子生成、および単独 Higgs 粒子生成 (さらに LHeC における単独 Higgs 粒子生成の 1-loop 断面積である。これらを以下 $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow Zh$, $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$, $e^-P \rightarrow hX$ と呼ぶことにする。これらの断面積を前述した tree level および、MSSM と SM の 1-loop 補正で計算し、またこれらの比較を行うために補正比 δ_{SUSY} を定義する。この補正比を用いる理由を以下に述べる。

1-loop の微分断面積の中で、仮想粒子を扱うのは以下の部分である。

$$d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{M}}(k_c) \equiv d\sigma_{\text{virtual}}^{\text{M}} + d\sigma_{\text{soft}}(k_c), \quad (3.47)$$

ここで, $\text{M}=(\text{SM or MSSM})$, でありそれぞれの部分を独立に計算した。ループの寄与および相殺項 $d\sigma_{\text{virtual}}^{\text{M}}$ は gauge 不変であり紫外発散は相殺されているが 赤外発散する。赤外発散を相殺するために 光子の仮想質量 λ を導入する。このため $d\sigma_{\text{virtual}}^{\text{M}}$ および soft な光子の $d\sigma_{\text{soft}}$ は λ に依存する。この λ への依存性は $d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{M}}$ の中で相殺される。最後に、 k_c に依存しない物理的な 1-loop 微分断面積が次のように得られる。

$$d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{M}} \equiv d\sigma_{\text{tree}} + d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{M}}(k_c) + \int \int_{k_c} \frac{d\sigma_{\text{hard}}}{d\Omega dk} d\Omega dk, \quad (3.48)$$

ここで k および Ω は hard な光子のエネルギーと立体角である。本研究では SM と MSSM で Higgs mass を共通の 125.1 GeV にとったため、SM と MSSM で $d\sigma_{\text{hard}}$ が十分に等しいことを確認した。このため モデルの違いは $d\sigma_{\text{tree}}$ および $d\sigma_{\text{hard}}$ においては無視できる。1-loop 補正自体のの検証可能性のために以下の補正比を定義する。

$$\delta_{\text{NLO}}^{\text{M}} \equiv \frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{M}} - d\sigma_{\text{tree}}}{d\sigma_{\text{tree}}}. \quad (3.49)$$

また MSSM の検証可能性を議論するに当たり 数値積分の不定性が最も小さい量を考えることが望ましいだろう。そこで次の微分断面積の補正比を定義する [10],

$$\delta_{\text{susy}} \equiv \frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{MSSM}} - d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{SM}}}{d\sigma_{\text{tree}}}. \quad (3.50)$$

tree の断面積および hard フォトンの寄与は (8) の分子において相殺されるので、 δ_{susy} は以下のように書ける。

$$\delta_{\text{susy}} \equiv \frac{d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{MSSM}} - d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{SM}}}{d\sigma_{\text{tree}}}. \quad (3.51)$$

また fermion 対生成においては

$$\delta_{\text{susy}}^{\text{G}} \equiv \frac{d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{MSSM,G}} - d\sigma_{\text{L\&S}}^{\text{SM,G}}}{d\sigma_{\text{tree}}}. \quad (3.52)$$

($\text{G}=\text{ELWK or QCD}$) という量を定義した。 $d\sigma_{\text{hard}}$ の計算においては、 f, \bar{f} 間の opening angle θ に対して $|\theta| < 0.95$ の hard photon(gluon) をカットするという運動学的なカットを導入し計算を行った。

4 MSSMパラメータセットの選定

4.1 繰り込み群方程式

超対称粒子の質量スペクトラムを繰り込む上で重要な手がかりは次に述べる「繰り込み群方程式」(RGE)が与えてくれる。大統一理論 (GUT) と呼ばれる理論 [20] が1970年代に提唱されたが、この模型は標準模型よりも高い $SU(5)$ 対称性を備えている。我々の宇宙で標準模型の $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_y$ 対称性が表れるよりも遙かに以前の超高温 (10^{28} K: 10^{15} GeV) にこの $SU(5)$ 対称性が現れていたという。この模型の真偽を確認することは陽子崩壊を観測することだとされている。このため陽子崩壊の起こる確率から逆算して、その寿命が宇宙の現在の年齢よりも小さいかどうかに関心が集まっている。陽子崩壊寿命は、Super-Kamiokande 実験から、

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) > 1.6 \times 10^{34} \text{yrs} \quad (4.53)$$

と考えられているが [21]、この値は GUT が予言する陽子の寿命よりもはるかに大きく、最初の GUT は否定されたといえるだろう。そこで超対称性を加味した、超対称大統一模型 (SUSY-GUT) というものが提唱された [22]。この模型では陽子の寿命は GUT よりも伸びるので、Super-Kamiokande 実験の結果を説明できる可能性がある上に、標準模型の階層性問題を解決する模型としても注目が集まっている。また、陽子崩壊確率は GUT に従えば、

$$\Gamma(p \rightarrow \pi^0 e^+) \propto \frac{\alpha_G^2}{M_X^4} \quad (4.54)$$

で表される。ここで、 M_X は陽子崩壊の理論における、 X boson と呼ばれる粒子の質量であり、 α_G^2 は、gauge 結合定数である。この3つの定数の関係性を調べるためには、陽子のように、非常にエネルギーが凝縮された高いエネルギースケールおよび、陽子崩壊後の低いエネルギースケールの双方を行き来できるような物理が必要だろう。このような目的を実現する上で用いられているのが「繰り込み群方程式」である。この方程式は現代の素粒子模型に関する理論的検証においては次のように用いられる。

LHC 実験で発見された Higgs 粒子の質量は 125 GeV であるが、この発見によって理解されたことは、真空の相転移により現在の宇宙が形成されたこと、及び電弱対称性の破れるスケールが、この $\mathcal{O}(10^2)$ GeV であることである。 W boson や Z boson の質量からもこのことをうかがい知ることができる。このスケールは、電弱相互作用、強い相互作用の統一される大統一理論 (GUT) のスケールや、重力も含めて統一される Plank スケールと、「巨大な砂漠」といわれるほど隔たっているが、それでも、ある模型を仮定したときにこの方程式を解いて、これらの質量が実現できるかどうかを探れば、その模型の大まかな妥当性をうかがい知ることができる。この方程式は、結合定数や質量に関する微分方程式になっており、これを「解く」ことにより我々は、扱っている物理模型の中の結合定数および質量のスケール依存性を知ることができる。超対称的な模型では電磁気力、弱い力、強い力の3つの結合定数に関する微分方程式の解は GUT スケールで一致することが知られている。超対称的な模型の検証で取られている多くの手法では、この GUT スケールでの

結合定数や質量から、微分方程式の物理スケールを動かしていき、電弱対称性が破れているスケールでの質量や結合定数を知る。本研究の立場からいえば、MSSM の粒子質量に関する重要な手がかりを与えてくれる数少ない手がかりのうちの1つがこの繰り込み群方程式である。例えば、Higgs の 2 乗質量を MSSM で計算する場合以下のような繰り込み群方程式がたてられる。

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_u}^2 = 3X_t - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{6}{5}g_1^2 |M_1|^2 + \frac{3}{5}g_1^2 S, \quad (4.55)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_d}^2 = 3X_b + X_\tau - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{6}{5}g_1^2 |M_1|^2 - \frac{3}{5}g_1^2 S. \quad (4.56)$$

ここで

$$S \equiv \text{Tr}[Y_j m_{\phi_j}^2] = m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2 + \text{Tr}[m_Q^2 - m_L^2 - 2m_u^2 + m_d^2 + m_e^2]. \quad (4.57)$$

である。GUT を仮定した MSSM 質量パラメーターへの RGE を考えるなら第 1 第 2 世代の squark \tilde{q} ($q = u, d, c, s$) および gluino \tilde{g} は強い相互作用によって slepton \tilde{l} , the chargino $\tilde{\chi}^\pm$ および neutralinos $\tilde{\chi}^0$ よりも大きな質量を持つと考えるのが自然である。

4.2 LHC bound

図 1 に LHC の超対称性粒子の直接探索の結果としての MSSM 粒子質量への制限を示した。ここで

$$m_{\tilde{\chi}_1^\pm}, m_{\tilde{\chi}_2^0}, m_{\tilde{l}} \gtrsim \mathcal{O}(100) \text{ GeV} \quad (4.58)$$

である。ここで、ILC の初期計画の重心系エネルギーに注意したい。LSP である neutralino であっても重心系エネルギーよりも重い場合直接生成は難しい。生成できたとしてもこの粒子は signal としては missing (つまり検出器にかからない) であるので、より重い超対称粒子一般も含めて超対称性粒子を ILC で直接生成することは難しいだろう。そこで、ILC においては超対称粒子には間接検証が有用であるといえるだろう。squark gluino の直接生成については squark が重いととき gluino が重いとときで場合分けされているが、もっとも緩い bound で

$$m_{\tilde{q}} \gtrsim 430 \text{ GeV} \quad (4.59)$$

である。前述したように、強い相互作用をする粒子は重いことが自然なため、排除領域は比較的大きくても発見の可能性がなくなったわけではない。LHC ではもっとも見やすいシグナルは slepton-lepton モードであるが squark gluino は崩壊先が slepton はになりやすく、あまり見えやすいとは言えない。第 3 世代 stop, sbottom は崩壊が複雑である上に sbottom が stop に連動しているため、解析が難しく排除領域は比較的小さい。理論的には stop (\tilde{t}) および sbottom (\tilde{b}) は異なった RGE の解をもつ。なぜなら大きな湯川相互作用を持つからである。湯川相互作用は質量に対する RGE に負の寄与を与えるので第 3 世代の stop, sbottom は squark, gluino よりも大きな質量を持つのが理論的には自然であるが加えて、top quark の質量が他の quark よりも大きいため $m_{\tilde{t}_1}$ と $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ (LSP) の質量差

が m_t よりも小さい可能性がある。このとき stop は MSSM パラメーターに応じて $\tilde{t}_1 \rightarrow b\tilde{\chi}_1^+, bW^+\tilde{\chi}_1^0, bl^+\tilde{\nu}_e, b\nu_e\tilde{\ell}^+, c\tilde{\chi}_1^0, bq\bar{q}\tilde{\chi}_1^0, bl^+\nu\tilde{\chi}_1^0, u\tilde{\chi}_1^0$ など様々な崩壊モードをとることができる [23]。このような複雑な内情があるが、本研究では粒子同士の相対的な質量差つまり、可能な崩壊先まで考慮して LHC bound と矛盾しないパラメーターセットを選んでいる。neutralino chargino は slepton-lepton に崩壊しやすいため LHC では見やすい。lepton モードの中でも tau はさらにハドロンに崩壊するので見にくくバウンドが低い。stau が軽いと neutralino chargino が見えにくくなる。このような事情も考慮して本研究のパラメーターセットは選ばれている。また 2012 年に Higgs 粒子が発見された直後は、その「新粒子」について、様々な憶測がなされていたが、その後の精密検証により、質量、標準模型からのずれなどの精度が大幅にアップデートされた。これを受け、「新粒子」が MSSM の Higgs 粒子 (h_0) でもある可能性は十分に生き残った。しかしながらこの Higgs 粒子の観測質量は MSSM の質量スペクトルへの厳しい制限となる。Higgs 粒子の質量を微調整するパラメーターは MSSM では top quark と Higgs 粒子のトリリニアカップリング (A_t) と呼ばれるパラメーターであり、このパラメーターがとれる領域が Higgs 粒子の質量が確定したことにより、現象論的にかなり制限されたことになる。図 2 に示したのは \tilde{t} 質量の X_t への依存性であり、 X_t 、 A_t および Higgs 粒子質量は次の関係にある

$$(\Delta m_h^2)^{1\text{-loop}} \equiv \frac{3m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left(\ln \frac{M_S^2}{m_t^2} + \frac{X_t^2}{M_S^2} - \frac{X_t^4}{12M_S^4} \right) \quad (4.60)$$

ここで $X_t = A_t - \mu \cot \beta$ である。点は 125 GeV の Higgs 粒子質量を実現している点である。Case1, Case2 とあるのは stop 質量が小さい場合と大きい場合を分けるため、本研究の開始時には Case1 の可能性がまだ十分にあり、LHC において stop が軽い可能性が、超対称粒子の最初の発見の可能性であった。本研究でも、これに合わせ、stop 質量を数 100 GeV 程度に置いていたが、後の 2016 年 3 月の「Moriond 会議」によって、stop 粒子の軽い領域は排除されたと発表された。専門家同士の見解は、これにより軽い領域に stop 粒子が存在する可能性、ひいては超対称性粒子が存在する可能性自体が、ほぼ否定されたということで一致したようである。しかし彼らの議論は例えば GUT スケールで結合定数や gauge boson の質量が一致することを前提としたモデルを仮定して語られていることも多い一方、本研究ではそのようなトップダウン的な仮定を置かない立場に立つので stop が軽い可能性は、残された領域が少しでもあれば、あり得るという立場である。

Model	$\epsilon, \mu, \tau, \gamma$	Jets	E_{miss}^T	$\int \mathcal{L} dt [\text{fb}^{-1}]$	Mass limit		Reference			
					$\sqrt{s} = 7, 8 \text{ TeV}$	$\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$				
Inclusive Searches	$\tilde{q}\tilde{q} \rightarrow q\tilde{q}^0$	0 mono-jet	2-6 jets	Yes	36.1	\tilde{q} [2x, 8x Degen] 0.8 \tilde{q} [1x, 8x Degen] 0.71	1.55	$m(\tilde{t}_1) < 100 \text{ GeV}$ $m(\tilde{q}) - m(\tilde{t}_1) = 5 \text{ GeV}$	1712.0232 1711.0301	
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{g}\tilde{q}\tilde{q}^0$	0	2-6 jets	Yes	36.1	\tilde{g}	2.0	$m(\tilde{t}_1) < 200 \text{ GeV}$ $m(\tilde{t}_1) = 300 \text{ GeV}$	1712.0232 1712.0232	
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{q}\tilde{q}^0(\ell\ell)$	3 e, μ cc, $\mu\mu$	4 jets 2 jets	-	36.1	Forbidden \tilde{g}	0.95-1.6	1.85	$m(\tilde{t}_1) < 300 \text{ GeV}$ $m(\tilde{g}) - m(\tilde{t}_1) = 50 \text{ GeV}$	1706.0371 1805.11381
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{q}\tilde{q}^0 W Z$	0	7-11 jets	Yes	36.1	\tilde{g}	1.2	1.8	$m(\tilde{t}_1) < 400 \text{ GeV}$ $m(\tilde{g}) - m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}$	1708.02794 1706.03731
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{t}\tilde{t}^0$	0-1 e, μ 3 b	3 b 4 jets	Yes	36.1	\tilde{g}	0.98	2.0	$m(\tilde{t}_1) < 200 \text{ GeV}$ $m(\tilde{g}) - m(\tilde{t}_1) = 300 \text{ GeV}$	1711.01901 1706.03731
	$\tilde{b}_1\tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \rightarrow b\tilde{t}_1^0/\tilde{t}_1^0$	Multiple	Multiple	Multiple	36.1	\tilde{b}_1 Forbidden \tilde{b}_1 Forbidden	0.9 0.59-0.82	0.7	$m(\tilde{t}_1) = 300 \text{ GeV}, \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow t\tilde{b}) = 1$ $m(\tilde{t}_1) = 300 \text{ GeV}, \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow t\tilde{b}) = 0.5$ $m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 300 \text{ GeV}, \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow t\tilde{b}) = 1$	1708.09266, 1711.03301 1708.09266 1706.03731
3 rd gen. squarks direct production	$\tilde{b}_1\tilde{b}_1, \tilde{t}_1\tilde{t}_1, M_2 = 2 \times M_1$	Multiple	Multiple	Multiple	36.1	\tilde{t}_1 Forbidden \tilde{t}_1 Forbidden	0.7	0.9	$m(\tilde{t}_1) = 80 \text{ GeV}$ $m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}$	1709.04183, 1711.11520, 1708.03247 1709.04183, 1711.11520, 1708.03247
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow W\tilde{b}_1^0$ or \tilde{t}_1^0	0-2 e, μ	0-2 jets/1-2 b	Yes	36.1	\tilde{t}_1	1.0	1.0	$m(\tilde{t}_1) = 1 \text{ GeV}$	1506.08616, 1709.04183, 1711.11520
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{H}$ LSP	Multiple	Multiple	Multiple	36.1	\tilde{t}_1 Forbidden	0.4-0.9	0.5-0.8	$m(\tilde{t}_1) = 150 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 5 \text{ GeV}, \tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$ $m(\tilde{t}_1) = 300 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 5 \text{ GeV}, \tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$	1709.04183, 1711.11520 1709.04183, 1711.11520
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{H}$ Well-Tempered LSP	Multiple	Multiple	Multiple	36.1	\tilde{t}_1	0.48-0.94	0.5-0.8	$m(\tilde{t}_1) = 150 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 5 \text{ GeV}, \tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$	1709.04183, 1711.11520
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow c\tilde{t}_1^0/\tilde{t}_1^0, \tilde{t}_1 \rightarrow c\tilde{t}_1^0$	0	2c	Yes	36.1	\tilde{t}_1	0.46	0.85	$m(\tilde{t}_1) = 0 \text{ GeV}$	1805.01649
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow c\tilde{t}_1^0$	0	mono-jet	Yes	36.1	\tilde{t}_1	0.43	0.32-0.88	$m(\tilde{t}_1) = m(\tilde{t}_2) = 50 \text{ GeV}$ $m(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) - m(\tilde{t}_1) = 5 \text{ GeV}$	1805.01649 1711.03301
EW direct	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow h$	1-2 e, μ	4 b	Yes	36.1	\tilde{t}_1	0.32-0.88	1.80	$m(\tilde{t}_1) = 0 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 180 \text{ GeV}$	1706.03986
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0$ via WZ	2-3 e, μ $cc, \mu\mu$	≥ 1	Yes	36.1	$\tilde{t}_1/\tilde{t}_1^0$ 0.17	0.6	0.6	$m(\tilde{t}_1) = 0$ $m(\tilde{t}_1) - m(\tilde{t}_2) = 10 \text{ GeV}$	1403.5294, 1806.02293 1712.08119
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0$ via Wh	2-3 e, μ $cc, \mu\mu$	≥ 1	Yes	36.1	$\tilde{t}_1/\tilde{t}_1^0$ 0.26	0.6	0.6	$m(\tilde{t}_1) = 0$	1501.07110
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0/\tilde{t}_1^0\tilde{t}_1^0 \rightarrow \tau\nu(\tau\nu), \tilde{t}_1^0 \rightarrow \tau\nu(\tau\nu)$	2 τ	-	Yes	36.1	$\tilde{t}_1/\tilde{t}_1^0$ 0.22	0.76	0.76	$m(\tilde{t}_1) = 0, m(\tilde{t}_2) = 0.5(m(\tilde{t}_1) + m(\tilde{t}_2))$ $m(\tilde{t}_1) = 100 \text{ GeV}, m(\tilde{t}_2) = 0.5(m(\tilde{t}_1) + m(\tilde{t}_2))$	1708.07875 1708.07875
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{t}_1^0$	2 e, μ	0	Yes	36.1	\tilde{t}_1	0.5	0.5	$m(\tilde{t}_1) = 0$	1803.02762
	$\tilde{H}\tilde{H}, \tilde{H} \rightarrow h\tilde{G}/Z\tilde{G}$	2 e, μ 0 4 e, μ	≥ 1 0 0	Yes Yes Yes	36.1 36.1 36.1	\tilde{H} 0.18 \tilde{H} 0.13-0.23	0.29-0.88	0.3	$m(\tilde{H}) - m(\tilde{t}_1) = 5 \text{ GeV}$ $\text{BR}(\tilde{H} \rightarrow h\tilde{G}) = 1$ $\text{BR}(\tilde{H} \rightarrow Z\tilde{G}) = 1$	1712.08119 1806.04030 1804.03602
Long-lived particles	Direct $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0$ prod., long-lived \tilde{t}_1^0	Disapp. trk	1 jet	Yes	36.1	\tilde{t}_1^0 0.15	0.46	0.46	Pure Wino Pure Higgsino	1712.02118 ATL-PHYS-PUB-2017-019
	Stable \tilde{g} R-hadron	SMP	-	-	3.2	\tilde{g}	1.6	2.4	$m(\tilde{t}_1) = 100 \text{ GeV}$	1606.05129
	Metastable \tilde{g} R-hadron, $\tilde{g} \rightarrow g\tilde{t}_1^0$	2 γ displ. $e\ell(e\mu)/\mu\mu$	- -	Yes -	20.3 20.3	\tilde{t}_1^0 [n \tilde{g}] = 100 ms, 0-2 ns	0.44	1.3	$1 < \tau(\tilde{t}_1^0) < 3 \text{ ns}$, SPS8 model $8 < \tau(\tilde{t}_1^0) < 1000 \text{ ms}, m(\tilde{t}_1^0) = 1 \text{ TeV}$	1710.04901, 1604.04520 1409.15442 1504.05162
RPV	LFV $\tilde{\mu}\tilde{\mu} \rightarrow \tilde{\nu}_\tau + X, \tilde{\nu}_\tau \rightarrow \mu\tau/\mu\tau$	$e\mu, \mu\tau$	-	-	3.2	$\tilde{\mu}$	1.9	1.9	$A_{231} = 0.11, A_{122} = 0.07$	1607.08079
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0/\tilde{t}_1^0\tilde{t}_1^0 \rightarrow WZ/\ell\ell\nu\nu$	4 e, μ	0	Yes	36.1	\tilde{t}_1 [A ₁₃₂ ≠ 0, A ₁₂₂ ≠ 0]	0.82	1.33	$m(\tilde{t}_1) = 100 \text{ GeV}$	1804.03602
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{q}\tilde{q}^0, \tilde{t}_1^0 \rightarrow g\tilde{q}\tilde{q}^0$	0	4-5 large-R jets	-	36.1	\tilde{g} [m \tilde{t}_1^0 = 200 GeV, 1100 GeV] \tilde{t}_1^0 [A ₁₃₂ = 2e-4, 2e-5]	1.05	1.9	Large A ₁₁₂ $m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}$, bino-like	1804.03602 ATLAS-CONF-2018-003
	$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow g\tilde{t}_1\tilde{t}_1^0, \tilde{t}_1^0 \rightarrow h\tilde{t}_1^0$	Multiple	Multiple	Multiple	36.1	\tilde{g} [A ₁₃₂ = 1, 1e-2]	1.8	2.1	$m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}$, bino-like	ATLAS-CONF-2018-003
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow h\tilde{t}_1^0$	0	2 jets + 2 b	-	36.7	\tilde{t}_1 [A ₁₃₂ = 2e-4, 1e-2]	0.58	1.05	$m(\tilde{t}_1) = 200 \text{ GeV}$, bino-like	ATLAS-CONF-2018-003
	$\tilde{t}_1\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 \rightarrow h\tilde{t}_1^0$	2 e, μ	2 b	-	36.1	\tilde{t}_1 [qq, h \tilde{t}_1]	0.42	0.61	$\text{BR}(\tilde{t}_1 \rightarrow h\nu/h\tilde{\nu}) > 20\%$	1710.07171 1710.05544

*Only a selection of the available mass limits on new states or phenomena is shown. Many of the limits are based on simplified models, c.f. refs. for the assumptions made.

図 1: ATLAS による超対称性粒子の直接探索の結果としての質量への制限。

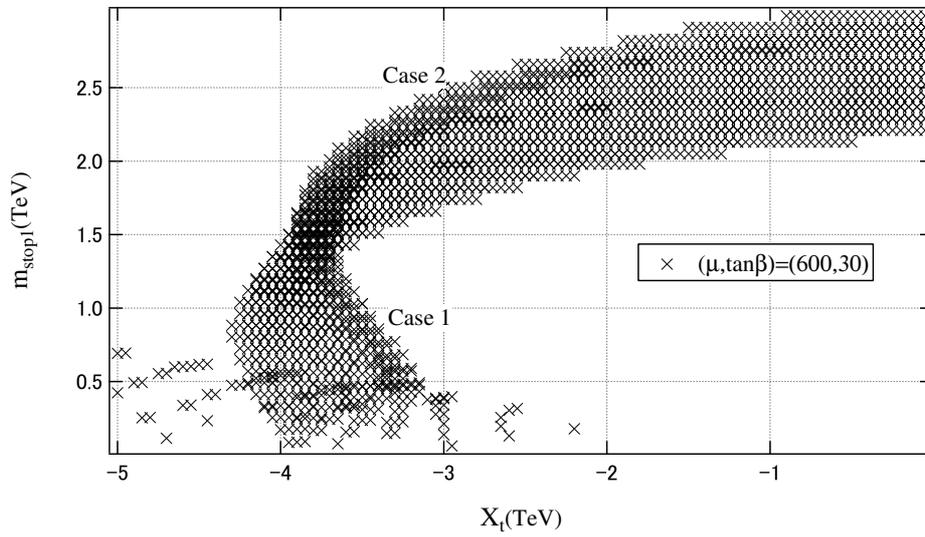


図 2: 2-loop level での stop 質量- A_t 平面上での Higgs 粒子の観測質量を満たす領域。

4.3 低エネルギー実験からの制限

4.3.1 ミュー粒子異常磁気能率

一方で、弱い相互作用しかしない粒子は TeV 領域の加速器よりも規模の小さい実験（ここでは低エネルギー実験と呼ぶ）の制限により、 $\mathcal{O}(0.5)$ TeV 以下であることが示唆されている。その最も代表的なものが次のミュー粒子異常磁気能率である。この量は専門的には muon g-2 と呼ばれる。Dirac の予言ではちょうど 2 になるミュー粒子の磁気能率に関する g 因子と呼ばれる量が、実験値とどの程度ずれているかという度合いを表す。[24]

$$\alpha_\mu^{\text{exp}} - \alpha_\mu^{\text{SM}} = (2.88 \pm 0.63 \pm 0.49) \times 10^{-9} \quad (4.61)$$

この量の実験値は非常に小さいものであるが、Dirac の予言に対して、新しい模型が提唱されるたびに実験値を説明できる精度が向上されてきたという歴史がある。QED を考え、標準模型を考えるにつれ、その実験値とのずれが小さくなった。[24]

$$\alpha_\mu(\text{QED}) = (11658471 \pm 0.0080) \times 10^{-10} \quad (4.62)$$

$$\alpha_\mu(\text{EW}) = (15.4 \pm 0.2) \times 10^{-10} \quad (4.63)$$

$$\alpha_\mu(\text{Hadron}) = (692.3 \pm 4.2) \times 10^{-10} \quad (4.64)$$

$$(4.65)$$

最後に残された非常に微細なずれを超対称理論で説明することができるかどうか、ということが論点となっている。MSSM パラメーターを直接含む階層ではこの量は以下のように表される [25]。

$$a_\mu(\tilde{W} - \tilde{H}, \tilde{\nu}_\mu) = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{m_\mu^2 M_2 \mu \tan \beta}{m_{\tilde{\nu}}^4} F_a \left(\frac{M_2^2}{m_{\tilde{\nu}}^2}, \frac{\mu^2}{m_{\tilde{\nu}}^2} \right), \quad (4.66)$$

$$a_\mu(\tilde{B}, \tilde{\mu}_L - \tilde{\mu}_R) = \frac{g_Y^2}{8\pi^2} \frac{m_\mu^2 \mu \tan \beta}{M_1^3} F_b \left(\frac{m_{\tilde{\mu}_L}^2}{M_1^2}, \frac{m_{\tilde{\mu}_R}^2}{M_1^2} \right), \quad (4.67)$$

$$a_\mu(\tilde{W} - \tilde{H}, \tilde{\nu}_\mu) = \frac{g_Y^2}{16\pi^2} \frac{m_\mu^2 M_1 \mu \tan \beta}{m_{\tilde{\nu}}^4} F_b \left(\frac{M_1^2}{m_{\tilde{\mu}_L}^2}, \frac{\mu^2}{m_{\tilde{\mu}_L}^2} \right), \quad (4.68)$$

$$a_\mu(\tilde{W} - \tilde{H}, \tilde{\nu}_\mu) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{m_\mu^2 M_2 \mu \tan \beta}{m_{\tilde{\nu}}^4} F_b \left(\frac{M_2^2}{m_{\tilde{\mu}_L}^2}, \frac{\mu^2}{m_{\tilde{\mu}_L}^2} \right), \quad (4.69)$$

$$a_\mu(\tilde{W} - \tilde{H}, \tilde{\nu}_\mu) = \frac{g_Y^2}{8\pi^2} \frac{m_\mu^2 M_1 \mu \tan \beta}{m_{\tilde{\mu}_R}^4} F_a \left(\frac{M_1^2}{m_{\tilde{\mu}_R}^2}, \frac{\mu^2}{m_{\tilde{\mu}_R}^2} \right), \quad (4.70)$$

$$F_a(x, y) = -\frac{G_1(x) - G_1(y)}{x - y}, \quad F_b(x, y) = -\frac{G_2(x) - G_2(y)}{x - y}, \quad (4.71)$$

ここで、

$$G_1(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} ((x-1)(x-3) + 2 \log x), \quad (4.72)$$

$$G_2(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} ((x-1)(x-1) + 2x \log x). \quad (4.73)$$

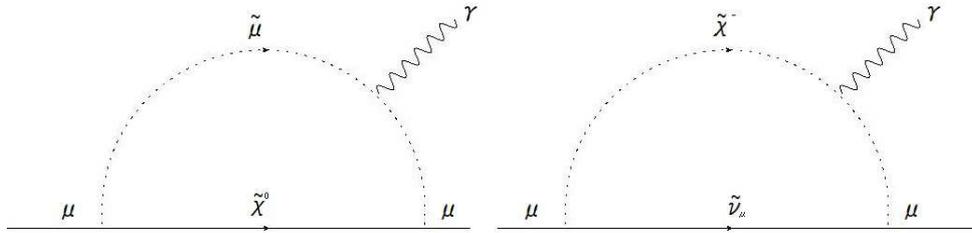


図 3: $g-2$ への MSSM 粒子の寄与を表す Feynman diagram の一例。

この表記を見てわかるように $M_{\tilde{t}}$ や M_1 , M_2 という弱い相互作用しかしない粒子の質量を決めるパラメータおよび $\mu, \tan\beta$ など, 電弱対称性の破れ (EWSB) に深い関わりのある Higgs 質量と Higgs と gauge boson の結合の度合いを決めるパラメータが含まれているのがわかる。この式の数値解が実験と矛盾しないためにはこれらのパラメータの値は自由に決定できるわけではなく制限される。この制限の実際の様子を示しているのが図 4 である。この図 4 は $M_1 - M_{\tilde{t}}$ 質量平面でのミュー粒子異常磁気能率の理論的な予測値である。インプットは本研究で用いる MSSM 模型の質量スペクトラムである。縦軸は M_1 といって弱い相互作用しかしない粒子の質量を大まかに決定するパラメータで、特別な仕掛けがない限り、ここから最も軽い粒子 (LSP) の質量が離れているとは考えられないため、この縦軸の意味を LSP の質量と見なせる。横軸は slepton の質量でありインプットパラメータのなかの該当部分を少しずつらしながら、計算されたものである。ここで、実線の間が「許された領域」つまりミュー粒子異常磁気能率の実験値の誤差範囲内にある領域である。これに対し破線の意味は、LSP と slepton の質量が等しいことを意味しているので、定義上意味のある領域はこの破線よりも下の領域に限られる。この破線と直線を合わせて考えれば、ミュー粒子異常磁気能率を満たすことができるためには slepton 質量, LSP 質量には上限, 下限があることが解るだろう。このようにして MSSM 粒子が取得するスペクトラムを絞り込む手がかりを得ていくのである。

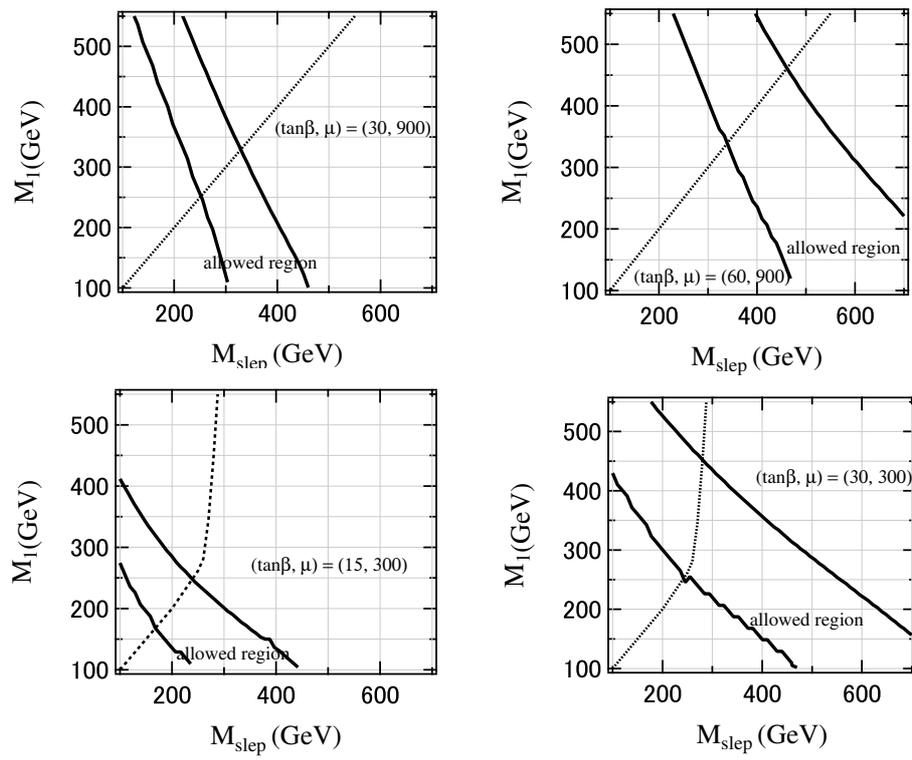


図 4: muon $g-2$ 理論値の slepton 質量 (横軸) への依存性。

4.3.2 B 中間子希崩壊分岐比

MSSM 質量スペクトラムを絞り込む上で次に重要なのが B 中間子希崩壊分岐比である。[19] これは専門的に $b \rightarrow s\gamma$ と呼ばれ、 B 中間子が世代を超えた崩壊をする確率を表している。この確率が非常に小さいため、このような呼ばれ方をしている。実験値は次の値であることが知られている。

$$\text{Br}(B \rightarrow \chi_s \gamma) = (3.43 \pm 0.21 \pm 0.07) \times 10^{-4} \quad (4.74)$$

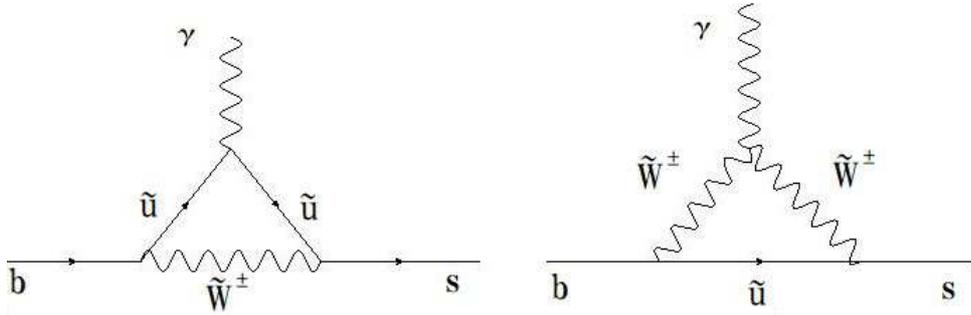


図 5: $b \rightarrow s\gamma$ への MSSM 粒子の寄与を表す Feynman diagram の一例。

図 6 に示したのは At へのこの制限の理論値の依存性および、同じ At の範囲での Higgs の質量の依存性である。右の図からこの制限を満たす At は 4 通りしかないことが解るだろう。この 4 通りのなかで 1 通りでも $b \rightarrow s\gamma$ を説明できる At がなければ、そもそも素朴な MSSM では B 中間子の希崩壊は説明できないことになる。そこで右の図での全てのパラメータ設定を保存したまま左の図で $b \rightarrow s\gamma$ の At への依存性を検証した。結果として $0 \sim -2$ TeV 付近に確かに、 $b \rightarrow s\gamma$ を実現できる At が存在することが解る。Higgs 粒子質量を実現するためのこの微調整は大きくても $\mathcal{O}(0.1)$ TeV である。

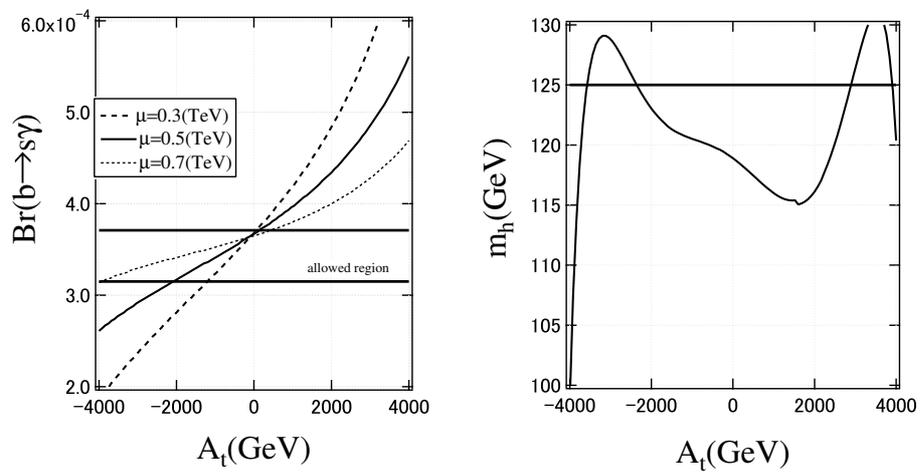


図 6: 2-loop level での $b \rightarrow s\gamma$ 制限, および Higgs 質量の A_t への依存性。

4.4 宇宙論からの制限

最後に MSSM の質量スペクトラムに大きな影響を与える観測事実として、暗黒物質の熱的残存量を挙げる。[26, 27] 「暗黒物質」とは、天文学の観測事実から帰納的に導き出される仮説上の物質である。現在の宇宙の「宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background)」の Planck 衛星による観察により、宇宙全体が持つ熱量およびそのエネルギー分布が知られているが [28]、現在の宇宙は素粒子論が明らかにしたように、真空の相転移が起こることにより出来たと考えられる。(インフレーション)。この事実を合わせて考えると、宇宙のエネルギー分布を説明するためには、宇宙初期に生成されたと考えられる暗黒物質が、ある割合で現在残っていると考えるのが自然である。この熱的「残存量」は以下の値である。

$$\Omega h^2 = 0.1198 \pm 0.0026 \quad (4.75)$$

この残存量を構成する熱平衡断面積は以下のように

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{\sum_{i,j} g_i g_j \int_{(m_i+m_j)^2} ds \sqrt{s} (\sqrt{s}/T) p_{ij}^2 \sigma_{ij}(s)}{2T \left(\sum_i g_i m_i^2 K_2(m_i/T) \right)^2}, \quad (4.76)$$

と表されることが知られている [付録 D 参照]。ここで i は各超対称性粒子を表し m_i はその質量を表す。また K_n は order n のベッセル関数を表す。ここで重要なことはこの関数が実際に MicroMEGAs のなかで計算されるということは、MSSM のすべての粒子の寄与が合計されるということであり、その結果が実験制限と一致しなければならないということである。MSSM を仮定した暗黒物質の残存量もやはり MSSM 粒子の質量をインプットとして計算されるのである。暗黒物質密度の観測事実は、具体的に stau 質量に関係してくる。MSSM 粒子の中に暗黒物質の候補があると仮定するならば、 $\tilde{\chi}_1^0$ (Bino) であると考えるのがもっとも素朴な考え方であり、その最も素朴な考えでは共消滅 (coannihilation) という現象が仮定される。この2つの粒子が共消滅を起こすのであれば、stau の質量は任意に選ぶことはできず、 $\tilde{\chi}_1^0$ の質量と大きな差を持つことはできない。

4.5 MSSMの数値パラメーターを制限する観測および実験データ

表3に本研究で考慮に入れたLHC bound以外のMSSMへの実験および観測データからの制限を表す。暗黒物質熱的残存量はMicroMEGAsを用いて計算され、低エネルギー実験やHiggs粒子観測質量はSuSpect2を用いて計算されることは上記した通りであるが、本研究の1つの重要な「結果」とも呼べるのがこのMSSMの質量スペクトラムを絞り込み生き残ったものを明らかにする、という側面なので、これについて、具体的側面を説明すると、SuSpect2はMSSMを含めて4種類のモデルにおける質量スペクトラムを出力してくれるパッケージである。MSSMの質量スペクトラムのための入力パラメーターは全49個であり、大きく分けて、超対称性の破れるスケールを決定するパラメーター、bosonとfermionの結合強度を表すトリリニアカップリング(trilinear coupling)という種類のパラメーター、超対称粒子それぞれの質量行列の右巻き左巻き成分である。これらの入力パラメーターに対して出力はMSSMにおけるHiggsの質量、 $g-2$ および $bs\gamma$ の予言値である。これらの予言値に合致する領域を探すことを「パラメータスキャン」とよぶ。MicroMEGAsも同様のことを行うので、入力パラメーターは同じであるが、出力として、暗黒物質の残存量のMSSMにおける予言値が含まれる。これらの予言値が、実験値の誤差範囲内であれば、そのパラメーターは「生きている」といえる。このときに全MSSMの粒子質量も同時に出力されてくるので、これらをまとめれば以下の表4,5のようなものができるだろう。これを「パラメーターセット」と呼んでいるのである。この一群の質量を入力値として実際の物理量を計算するならば、「現象論的に死んでいないモデル」で計算することになる。パラメータセットA,B,Cおよび1,2,3の具体的な特徴を述べる。A,B,Cと1,2,3を分けているものは \tilde{t} の質量である。 \tilde{t} はMSSMの中ではLHCで直接生成される可能性が注目されていたため、これが軽いsetが、A,B,Cであり、重いセットが1,2,3である。A,B,Cの軽いセットを用いていた当初は軽い \tilde{t} が見つかる可能性が現在よりも高かった。この可能性が完全に否定された、と言い切る事ができる訳ではないが、排除領域が軽いstopの可能性を大きく圧迫している状況では、重い \tilde{t} の可能性を考えない訳にはいかないだろう。この目的のためにセット1,2,3がある。そして全体の傾向としては弱い相互作用しかしない粒子は軽く、強い相互作用もする粒子は重い傾向がある。この理由は前述したように低エネルギー実験の結果およびRGEとの整合性にある。 μ や $\tan\beta$ の値も、完全に任意に選ばれているわけではなく、パラメータスキャンの結果に反するものを除き、超対称性の破れるスケールから考えて不自然なものは選ばれていない。また表6,7に設定して各セットにおける実験制限の理論予言値を示した。

表 3: 本研究で考慮に入れた MSSM に対する実験的制限の一覧。

Experimental bounds	
(1) μ 粒子異常磁気能率 [24]	$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = (2.88 \pm 0.63 \pm 0.49) \times 10^{-9}$
(2) B 中間子希崩壊分岐比 [19]	$\text{Br}(B \rightarrow \chi_s \gamma) = (3.43 \pm 0.21 \pm 0.07) \times 10^{-4}$
(3) 暗黒物質熱的残存量 [17]	$\Omega h^2 = 0.1198 \pm 0.0026$

表 4: Masses and MSSM parameters for three sets (masses in unit of GeV).

set A				set B				set C			
$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$			$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$			$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$		
419.9	620.5			508.1	636.8			467.5	626.7		
$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$
218.4	420.0	603.7	620.2	277.9	508.5	603.4	637.1	242.8	467.6	603.6	626.7
$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$		$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$		$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$	
352.5	358.0	349.4		317.8	323.3	313.8		322.8	328.3	318.9	
$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$		$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$		$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$	
228.4	336.3	277.9		283.9	377.1	327.4		320.1	405.3	359.6	
\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2	\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2	\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2
1719	1739	1740	1740	1720	1739	1740	1741	1720	1739	1740	1741
\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2	\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2	\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2
344.0	2078	899.9	2060.9	1802	2244	1998	2063	279.6	2078	800.0	2061
θ_τ	θ_b	θ_t		θ_τ	θ_b	θ_t		θ_τ	θ_b	θ_t	
0.7970	1.556	1.4502		0.8150	1.376	0.8533		0.8175	1.557	1.456	
M_1	M_2	M_3		M_1	M_2	M_3		M_1	M_2	M_3	
220.0	435.0	2000		280.0	540.0	1500		244.5	489.0	2000	
$\mu=600, \tan\beta=30$				$\mu=600, \tan\beta=30$				$\mu=600, \tan\beta=30$			

表 5: Masses and MSSM parameters for three sets (masses in unit of GeV).

set 1				set 2				set 3			
$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$			$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$			$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\chi}_2^+$		
456.2	1008			456.2	1008			456.2	1008		
$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$
349.2	456.2	1003	1007	349.2	456.3	1003	1007	349.2	456.2	1003	1007
$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$		$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$		$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\nu}_\ell$	
452.3	471.9	465.7		472.2	472.2	465.9		472.2	471.9	465.8	
$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$		$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$		$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$	
364.9	55.8	465.7		365.0	553.8	465.9		364.9	554.5	465.8	
\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2	\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2	\tilde{u}_1	\tilde{u}_2	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2
1499	1500	1500	1501	5000	5000	5000	5000	10000	10000	10000	10000
\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2	\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2	\tilde{t}_1	\tilde{t}_2	\tilde{b}_1	\tilde{b}_2
1413	1593	1461	1539	4774	5220	4990	5010	9865	10130	9994	10010
θ_τ	θ_b	θ_t		θ_τ	θ_b	θ_t		θ_τ	θ_b	θ_t	
0.7969	0.7913	0.7840		0.8030	0.7912	0.7852		0.8010	0.7912	0.7853	
M_1	M_2	M_3		M_1	M_2	M_3		M_1	M_2	M_3	
350.0	450.0	2000		350.0	450.0	5000		350.0	450	10000	
$\mu=1000, \tan\beta=50$				$\mu=1000, \tan\beta=50$				$\mu=1000, \tan\beta=50$			

表 6: 本研究で考慮に入れた MSSM に対する実験的制限の各 1,2,3 セットにおける値。

Experimental bounds	set1	set2	set3
(1) μ 粒子異常磁気能率	2.100×10^{-9}	1.915×10^{-9}	2.0422×10^{-9}
(2) B 中間子希崩壊分岐比	3.023×10^{-4}	3.11×10^{-4}	3.012×10^{-4}
(3) 暗黒物質熱的残存量	0.121	0.121	0.120

表 7: 本研究で考慮に入れた MSSM に対する実験的制限の各 A,B,C セットにおける値。

Experimental bounds	setA	setB	setC
(1) μ 粒子異常磁気能率	1.957×10^{-9}	1.941×10^{-9}	1.946×10^{-9}
(2) B 中間子希崩壊分岐比	3.167×10^{-4}	3.658×10^{-4}	3.551×10^{-4}
(3) 暗黒物質熱的残存量	0.120	0.1201	0.120

5 1-loop levelの断面積

5.1 各プロセスにおける期待できるイベント数

以下の図 7,8 に ILC における重心系エネルギーへの全断面積の依存性を示す。ここから理解できることは、断面積は $\tau^-\tau^+$ 、 $b\bar{b}$ においては低エネルギーで最も高く、 $t\bar{t}$ 、 Zh においてはある一定値でピークを持つということである。いずれにせよその 1 点が最も生成事象数の大きな点であるので、ここでの実験や検証を行うことを考えることが望ましいことが解る。このような考察自体は ILC の計画段階ですでに十分に話し合われており、ILC の技術書である TDR(Technical Design Report) に詳細がある。本研究でも当然のことながら、ILC で実際に計画されている重心系エネルギーを選び、そこでの検証を行った。tree level の断面積から見積もれるイベント数は $\sqrt{s}=(250,500)\text{GeV}$ で $e^-e^+ \rightarrow \tau\bar{\tau}$ および $e^-e^+ \rightarrow b\bar{b}$ が $(6 \times 10^7, 3 \times 10^6)$ イベント、 $\sqrt{s}=500\text{GeV}$ で $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ が 3×10^6 イベント、 $\sqrt{s}=(250,500)\text{GeV}$ で $(e^-e^+ \rightarrow Zh, e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h)$ が $(6 \times 10^6, 4 \times 10^5)$ イベントである。

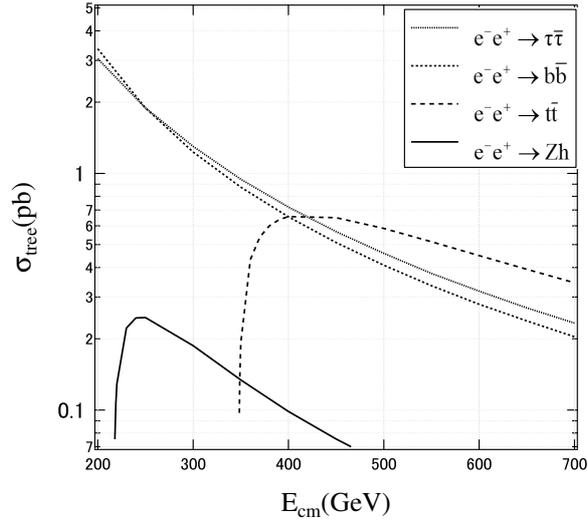


図 7: $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$ および $e^-e^+ \rightarrow Zh$ における重心系エネルギーへの全断面積の依存性。

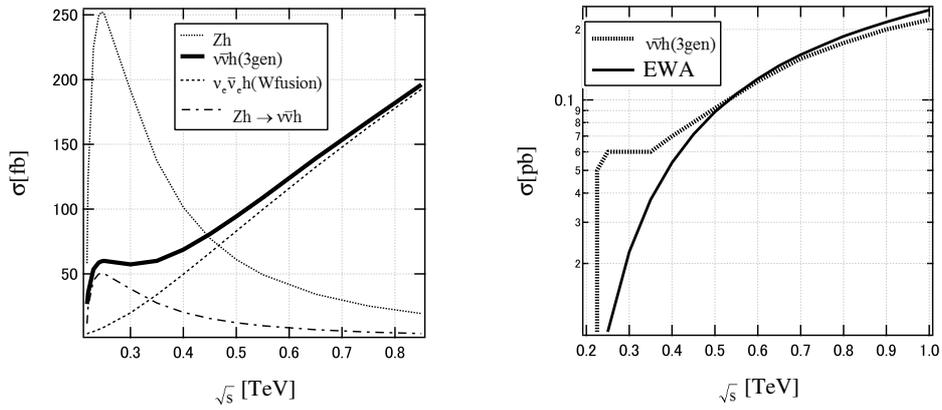


図 8: $e^-e^+ \rightarrow Zh$ および $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ における重心系エネルギーへの全断面積の依存性。左の図の 3gen は終状態の 3 世代の neutrino の寄与の合計。右の図は 3gen と EWA の比較。

また図8の左に図示されているように、Higgs 粒子の単独生成と Z との随伴生成のそれぞれが、高エネルギー側と低エネルギー側で、それぞれ有意になることを示している。右の図は EWA が単独生成の tree level の近似と一致する領域を表し、500 GeV 付近を境に近似の精度が良くなることを表している。

5.2 fermion 対生成

5.2.1 1-loop 補正の必要性および各種数値チェック

図9に 1-loop 補正比 $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ における $\sqrt{s} = 500$ GeV における標準模型の 1loop 補正比 δ_{NLO} を示す。横軸は top quark の生成角である。この比を調べたのは MSSM の 1-loop 補正の検証以前に 1-loop 補正の検証自体に意味があるかどうかを調べるためである。この図には誤差が示されているが、この誤差は非常に素朴な統計誤差である。この算出は以下のように行った。

- (1) SM の微分断面積を計算する。SM は非常に確立されたモデルであるため、この結果を大きく左右するような初期設定はほとんどない。
- (2) SM の 1-loop 断面積に前述したルミノシティーを、(ILC で同重心系エネルギーで計画されているルミノシティーである 500fb^{-1} を) かけることで非常に確からしい事象生成数を得る。
- (3) この事象生成数を統計誤差の事象数とした統計誤差を求める。この段階では誤差は事象生成数に対する誤差である。
- (4) この誤差を補正比に対する誤差に置き換える。

このようにして算出した誤差との比較の意味するところはまず、線の高さが誤差に比べて大きいということである。これは SM の 1-loop の寄与が、統計的に「検証可能」であることを意味している。もしこの量が誤差に埋もれてしまうようであれば、「検証不可能」ということになるだろう。ここで仮定している誤差は非常に素朴な誤差であるので、非常に小さいものであるはずである。この後に様々な理論的系統誤差、実験的系統誤差を加味していけば誤差は大きくなっていくかもしれないが、この最初の誤差に埋もれないことが確認できて初めて、次の議論ができるだろう。標準模型はよく確立されたモデルなので MSSM に比べ理論的な不定性が小さい上に MSSM と矛盾しないので、このモデルでの 1-loop 補正が誤差に埋もれないかがまず最初に調べられるべきである。30%~3% への右肩下がりの結果となった。誤差と比べ全域的に非常に大きい値を持つのでこの後 MSSM と標準模型の差を検証することに意味がある事が解る。

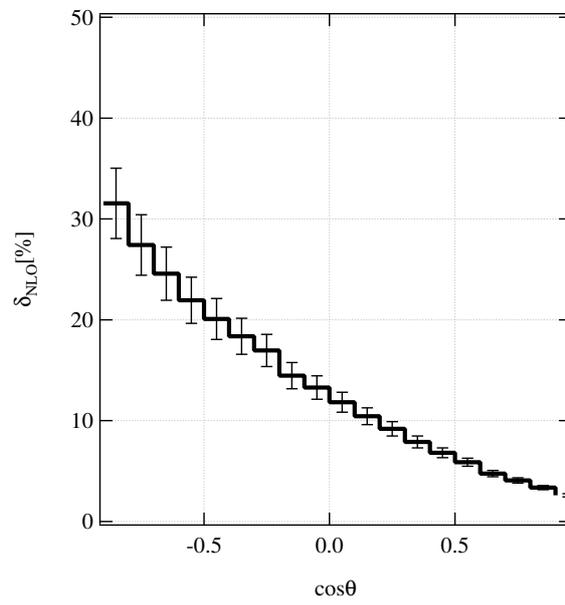


図 9: 1-loop 補正された $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ における $\sqrt{s} = 500$ GeV. における標準模型の 1loop 補正比 δ_{NLO} .

次にこのプロセスにおいて正しい計算プログラムがかけられているかどうかをチェックする方法について説明する。繰り込みスキームが機能しているかどうかは、CUV, および Lambda と呼ばれるパラメーターに計算結果が依存しないかどうかを確認することで可能になる。また、gauge 不変な結果であるかどうかは NLG の 7 つのパラメーターに計算結果が依存しない事を確認すれば良い。図 10 にこのチェック結果を示す。これは、CUV, Lambda のパラメーターをそれぞれ 2 通りの値で計算した結果および、NLG の 7 つのパラメーターを 2 パターンで計算した結果である。このそれぞれの計算結果が同じ値を示していることが確認できているので、この計算結果は単なる仮想のデータではなく、「物理的な意味をもった」データである事が確認できた。

表 8: $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ における gauge 不変性および繰り込み可能性のチェック

(CUV,Lambda)	tree	loop	soft	sum
$(0, 10^{-20})$	0.515077298	-3.052741941	2.29602431	-0.24164032
$(10, 10^{-20})$	0.515077298	-3.052741941	2.29602431	-0.24164032
$(10, 10^{-24})$	0.51507729	3.689237184	2.93251945	-0.24164032
$(0, 10^{-20})$ NLG check	0.515077298	-3.052741941	2.29602431	-0.24164032

5.2.2 改良点

fermion 対生成において、問題となっていたのは特に top と bottom の対生成における SM の QCD 補正をどう計算するかであった。SM の QCD 補正の計算が困難であった理由は、QCD の理論的特質、および GRACE の開発段階での技術的問題であった。QCD の結合定数である α_s は「漸近的自由性」と呼ばれる性質を持っている。これはエネルギー状態が高くなる（粒子同士が近くなる）につれて結合力が弱くなる、という非常に我々の直感力とは矛盾した性質である。クォークが単体で観測されることはなく、「閉じ込められた」状態でしか観測されないという事実などは、この強い相互作用の性質に由来すると考えられている。これにより素粒子の相互作用の実際の摂動展開の 2 次以降の計算がよく定義されていないのである。SM の GRACE が開発された段階では、この部分の議論が、今日よりも洗練されておらず、QCD の 1-loop は計算できるようになっていなかった。その後、MSSM に対応するように GRACE が拡張されると、MSSM のすべての相互作用に対して「on shell 繰り込み」が適応されることにより、MSSM での QCD の 1-loop はよく定義され計算可能となったが、本研究のように、MSSM の断面積とそのうちの SM の寄与を比較するような検証を行う場合には、SM の相互作用のみの寄与が必要である。この問題に対して我々がとった処方は、tree ダイアグラム、SM ダイアグラム、MSSM ダイアグラムのすべてのダイアグラムのなかから、MSSM ダイアグラムだけを取り除くことであった。また、MSSM 粒子が関与してくる相互作用は、SM の 1-loop ダイアグラムのうちの、繰り込みの「相殺項」（カウンター項）の中にもあるので、この部分に「立ち入って」この寄与をすべて切り落とし、SM のみの 1-loop 計算を完成させた。

このときに行ったことを相対論的な量子力学の定式を交えて解説すれば理解の一助

になるだろう。単純のために Dirac 場で議論すると、次の定式で表される Dirac 場の伝播関数

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(0))|0\rangle = iS_{F(x)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (5.77)$$

に対して、

$$\langle 0|T_Z(\psi(x)\bar{\psi}(0))|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{iZ_2e^{-ipx}}{\not{p} - m_r + i\epsilon} \quad (5.78)$$

を考える。これが「繰り込まれた伝播関数」である。これらの定義式の第一項は二点相関関数と呼ばれる。GRACE の伝播関数の計算はすべてこの組み合わせによって計算されている。伝播関数を積分すると通常発散してしまうために、 Z_2 や「繰り込まれた質量」と呼ばれる m_r を「処方」として与える。これにより発散を相殺することができる。これらの定数繰り込みの章でも触れたように「繰り込み定数」と呼ばれ

$$Z_2 = 1 + \delta_2, m_r = m + \delta_m \quad (5.79)$$

などと書かれる。この処方によって理論の発散を防ぐことができる。これは特に不可思議なことを行っているわけではなく繰り込み定数の中にあらかじめ無限大を消せるような数値を入れておく、ということである。繰り込みについて知られてなかった時代には、素粒子の理論というものの限界がよく知られていなかった。理論模型が有限個の数値パラメータを持つという基本的な事実さえよく理解されていなかった上に、まして、その設定如何によって計算結果に現れる無限大を相殺できるという可能性はごく少数の優れた研究室の中で語られるだけだった。現在はこのことが比較的よく知られているので、無限大の結果でも、有限回の操作で発散が消せるという「発見」をくりこみ理論と呼ぶ、と理解されている。GRACE では、この繰り込み定数に対応する「相殺項」に対して、Feynman ダイアグラムが生成されるようになっている。よって生成されたダイアグラムを「視覚的に」確認すれば、相殺項のダイアグラムを特定できる。このダイアグラムの関数が書かれている `scterms.f` というフォートランファイルの中で、MSSM 粒子の寄与のある部分を切り落とすことで、1-loop の繰り込まれた SM の寄与を見積もった。

5.2.3 数値結果 (τ 対生成)

$e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ の 250GeV での数値結果を以下図 10,11 に示す。これは τ^- の生成角 ($\cos\theta$) に対する断面積の依存性である。ここから読み取れるのはまず、前後方非対称な結果であることである。fermion 対生成というものは、粒子とそれに対する反粒子の対生成であるため、角度分布以外の分布で数理的に意味のある結果が出るとは考えにくい。そこで角度分布にはじめからの絞りを絞って結果を得た。Zh および Higgs 粒子の単独生成において角度分布を見ることにしたのは、この fermion 対生成との比較のためである。ここで、図の凡例が示すようにそれぞれの線は `tree,SM,setA` を表しているのであるが、`setA` だけを表示した理由は、視覚的にそれぞれの set 間で違いは出ないからである。この違いの詳細を見るためにも δ_{susy} を見てみる必要がある。そこで次の図で δ_{susy} を示した。

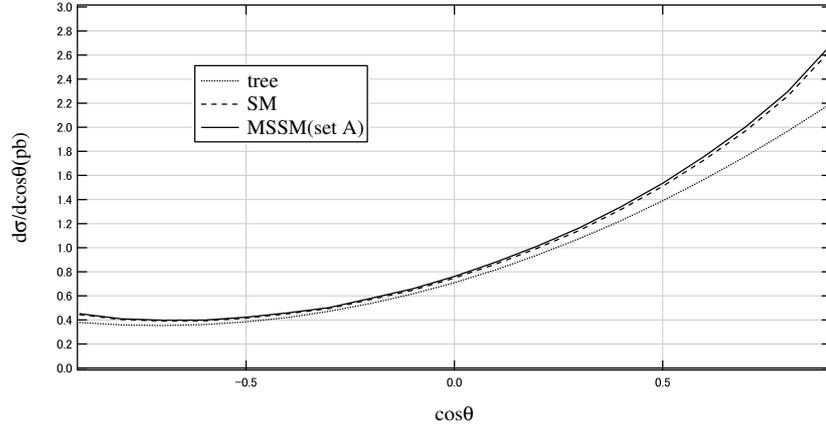


図 10: 1-loop 補正された $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ 断面積の $\sqrt{s} = 250$ GeV. における角度分布。点線, 破線, 直線は tree, SM 1-loop MSSM (set A) の 1-loop level における断面積に相当する。

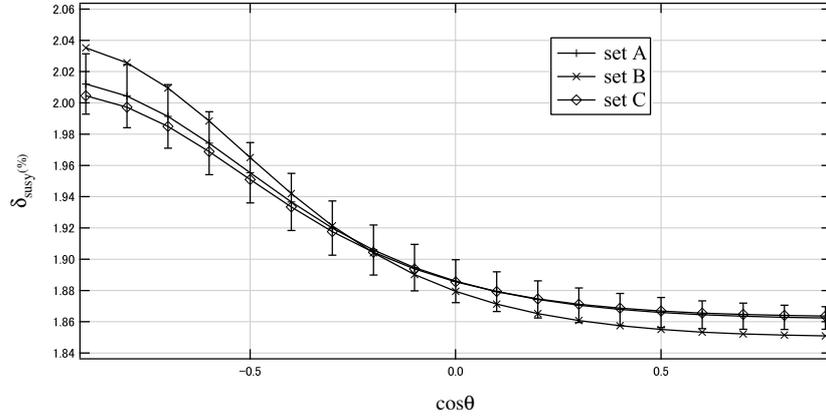


図 11: $\sqrt{s} = 250$ GeV における $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ の MSSM 補正比 δ_{SUSY} 。

また $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ の 500GeV での補正比を以下図 12 に示す。各セットの大小関係は変わらず、プロット全体の右肩下がりの傾向に変化はないが、前方でわずかに set C を区別できる可能性を表している。

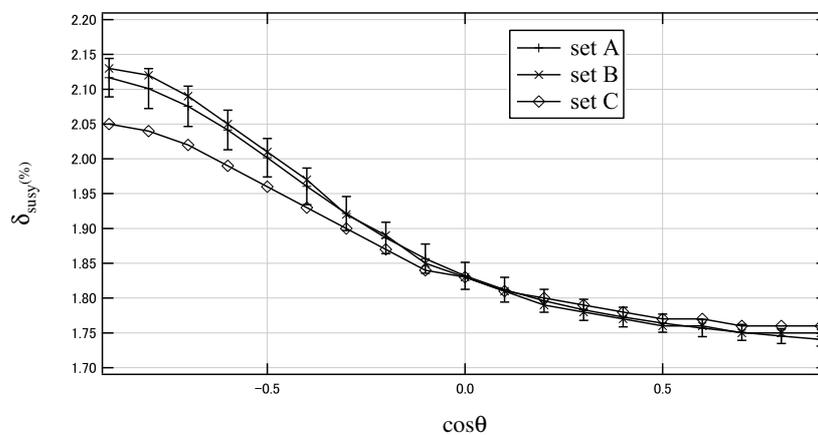


図 12: 1-loop 補正された $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ における $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$. における補正比 δ_{SUSY} の角度分布。

5.2.4 数値結果 (bottom 対生成)

次の図13,14に $e^-e^+ \rightarrow b\bar{b}$ の250GeVでの結果を示す。図13の左に setA における MSSM と SM の1-loop 補正の ELWK 補正と QCD 補正の内訳を示した。また、右の図に ELWK と QCD 補正が合計された1-loop 微分断面積を示した。左の図から解ることは、SM および MSSM で ELWK 補正と QCD 補正の内訳に違いがほとんど見られないということであり、右の図から解ることは、やはり前後方非対称であることである。これについて δ_{susy} を見たのが次の図14である。左の図は setA でのものである。左の図から解ることは ELWK 補正が正に効き、QCD 補正が負に効いて合計が決まるということであるが、右の図の「撓んだ」形状は、ほとんど QCD 補正から来ることが解る。右の図は ELWK 補正と QCD 補正の合計としての1-loop 補正における δ_{susy} である。誤差の意味することは前述した。誤差と比較して十分な高さが見られるために超対称仮想粒子の効果が「検証可能」であり、やはりここでも set 間の区別は不可能であることが解る。また、500 GeV での $e^-e^+ \rightarrow b\bar{b}$ の結果は省略した。これは全ての傾向性が250 GeV の場合と変わらないからである。

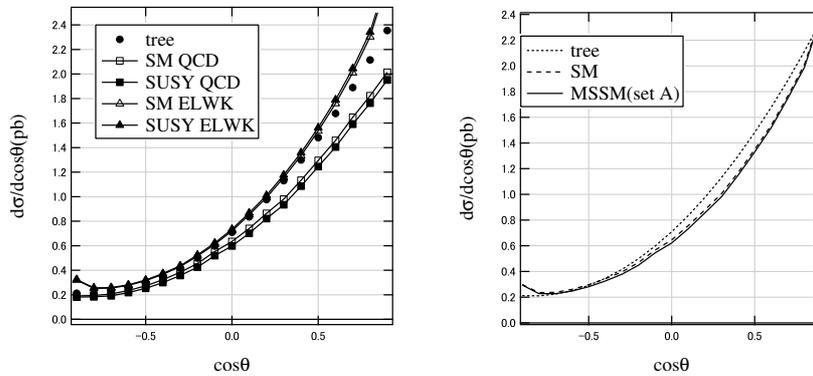


図13: 1-loop 補正された、 $e^-e^+ \rightarrow b\bar{b}$ 断面積の $\sqrt{s} = 250$ GeV での角度分布。左の図は QCD と ELWK 補正を別々に示し、その合計を右の図に示した。

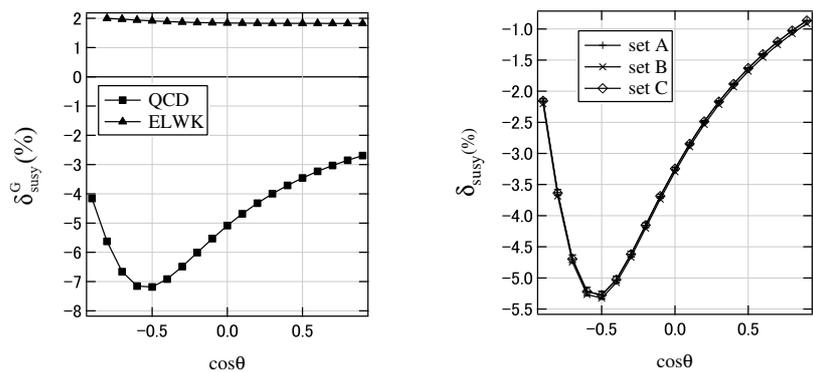


図14: $e^-e^+ \rightarrow b\bar{b}$ の $\sqrt{s} = 250$ GeV における補正比。左の図は QCD ,ELWK の寄与を別々に示している (set A)。右の図は3つのセットのそれぞれの寄与を示している。

5.2.5 数値結果 (top 対生成)

次の図 15,16 に 500 GeV での $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ の結果を示す。図 15 の左の図に setA における MSSM と SM の 1-loop 補正の ELWK 補正と QCD 補正の内訳を示した。また、右の図に ELWK と QCD 補正が合計された 1-loop 微分断面積を示した。左の図から解ることは、SM および MSSM で ELWK 補正と QCD 補正の内訳に違いがほとんど見られないということであり、右の図から解ることは、やはり前後方非対称であることである。図 15 の左の図から、次の大小関係が解る。

$$\frac{d\sigma_{1\text{loop}}^{\text{SM,QCD}}}{d\cos\theta} > \frac{d\sigma_{1\text{loop}}^{\text{MSSM,QCD}}}{d\cos\theta} > \frac{\sigma_{1\text{loop}}^{\text{MSSM,ELWK}}}{d\cos\theta} > \frac{\sigma_{1\text{loop}}^{\text{SM,ELWK}}}{d\cos\theta}. \quad (5.80)$$

図 16 の右の図から MSSM の 1-loop 効果は -3.15~-1.85 の値を持ち、setC が他の set と区別できる事が解る。setC と A,B の最も大きな違いは C が最小の質量の stop を持っている事で、stop が loop で回るダイアグラムの寄与が全体の中で最も大きい寄与を持つ事は確認できている。そのため最も軽い stop の効果がこの結果を表していると見ることができる。

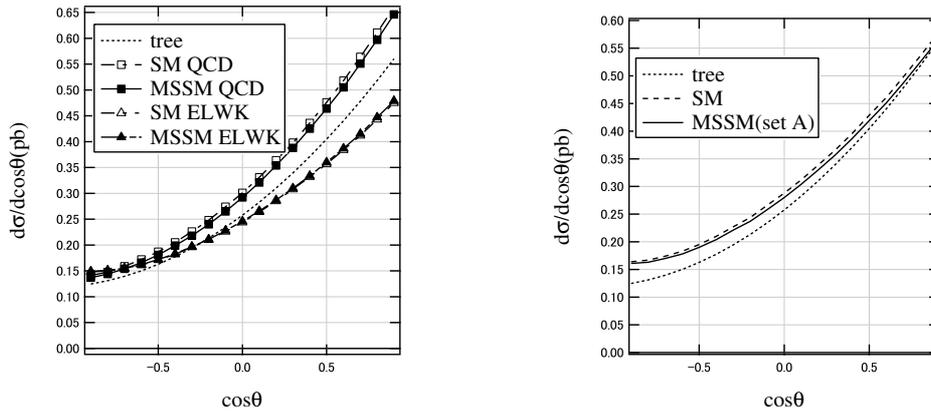


図 15: 1-loop 補正された $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ の断面積の $\sqrt{s} = 500$ GeV における角度分布。左の図は QCD と ELWK 補正を別々に示し (set A)、その合計を右の図に示した。

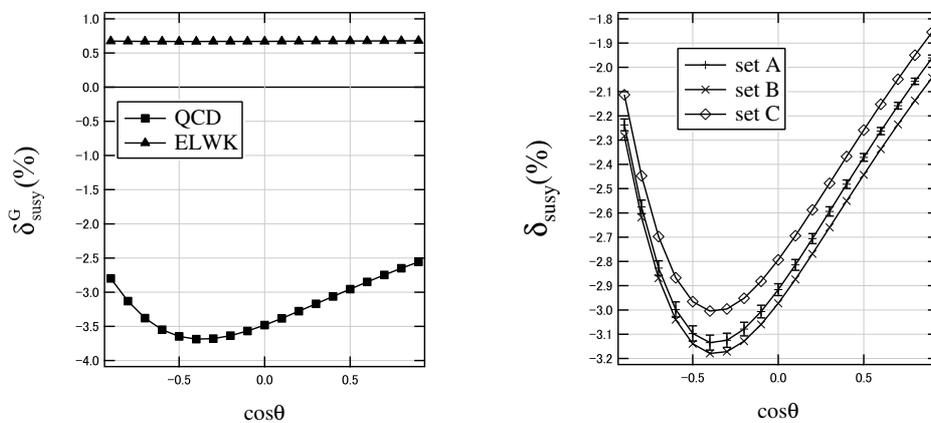


図 16: $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ の $\sqrt{s} = 500$ GeV における補正比 δ_{susy}^G の角度分布。左の図は QCD, ELWK の寄与を別々に示している (set A)。右の図は 3 つのセットのそれぞれの寄与を示している。

5.3 Z 粒子を伴った Higgs 粒子の随伴生成

5.3.1 1-loop 補正の必要性および各種チェック

図 17 に $e^-e^+ \rightarrow Zh$ の 250 GeV における標準模型の 1-loop 補正比 δ_{NLO} を示す。横軸は Z の生成角である。-8.5~ -9.5% 程度の対称で下方に撓んだ形状となった。この値が誤差よりも大きいため、1-loop 補正の検証自体に意味があることが解る。また、ここでも、各種のチェックをクリアできたために物理的な意味のある結果であることが確認された。

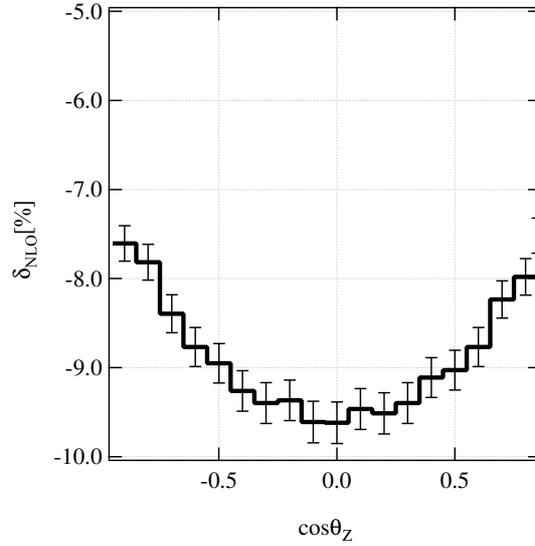


図 17: $e^-e^+ \rightarrow Zh$ の $\sqrt{s}=250$ GeV における標準模型の 1-loop 補正比 δ_{NLO} 。

表 9: $e^-e^+ \rightarrow Zh$ における gauge 不変性および繰り込み可能性のチェック。

(CUV,Lambda)	tree	loop	soft	sum
(0, 10^{-24})	0.441782984605523	-2.950089781129010	2.362693108142250	-0.145613688381231
(10, 10^{-24})	0.441782984605523	-2.950089781129010	2.362693108142250	-0.145613688381231
(10, 10^{-27})	0.441782984605523	-3.332385989879240	2.744989316891930	-0.145613688381781
(0, 10^{-24}) NLGcheck	0.441782984605523	-2.950089781129010	2.362693108142250	-0.145613688381231

5.3.2 改良点

Z および Higgs 粒子の随伴生成計算において、問題となっていたのは計算するダイアグラムの数が多すぎるために、1 度にコンパイルしようとする上でエラーが出ること、および計算する上で、数値的に発散してしまい有意な結果が得られないという事であった。そこで全ダイアグラムの計算を 4 つに分けて計算しダイアグラム生成を行った。このときに行ったことを具体的に以下に説明する。

Z の随伴生成を伴った Higgs 粒子生成では、総ダイアグラム数が 4000 に上るため、一度に実行ファイルを生成するためのコンパイルコマンドを走らせた際にエラーが生じた。このエラーは 1 つの原因から生じているといった類いのもではなく、おそらく、膨大すぎる処理を一つのコマンドで一度に行おうとすることから、CPU に対する付加がかかりすぎる、もしくは有限時間内に作業が終わる見通しが立たない、という類いのエラーであると判断した。このため、実行ファイルを生成する Makefile を 4 つに分け、最終的に 4 つを合計する Makefile を書き、4 段階で実行ファイルを生成し、一つの実行ファイルで実行するようにした。この処置によって、エラーを起こすことなく全ダイアグラムを生成することができた。

5.3.3 数値結果

次の図 18 に $e^-e^+ \rightarrow Zh$ の 250 GeV での結果を示す。左の図が微分断面積であり右の図が δ_{susy} を表す。左の図から解ることは、tree に対して SM, MSSM ともに、負の 1-loop 補正值を持つと言うことであり、次の大小関係を示した。

$$\frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{SM}}}{d\cos\theta_Z} \lesssim \frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{set1}}}{d\cos\theta_Z} \lesssim \frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{set2}}}{d\cos\theta_Z} \lesssim \frac{d\sigma_{\text{1loop}}^{\text{set3}}}{d\cos\theta_Z} < \frac{d\sigma_{\text{tree}}}{d\cos\theta_Z}. \quad (5.81)$$

右の図から解ることは統計誤差と比較して、MSSM の 1-loop 効果が 1.17~1.25% の値を持ち「検証可能」であることである。特筆すべきこととしては set 間の区別が可能であるということである。set 1,2,3 でこのプロセスを計算した結果、set 間の区別が可能であるということは、重い squark の特徴、特に寄与の大きな第 3 世代 squark の効果を検証するのに適していると言うことである。このため軽い \tilde{t} の効果が区別可能である top 対生成と、このプロセスの両方を見れば、MSSM の効果が見られるだけでなく、どのような粒子の効果が見えているのかがについての手がかりを得ることができる。

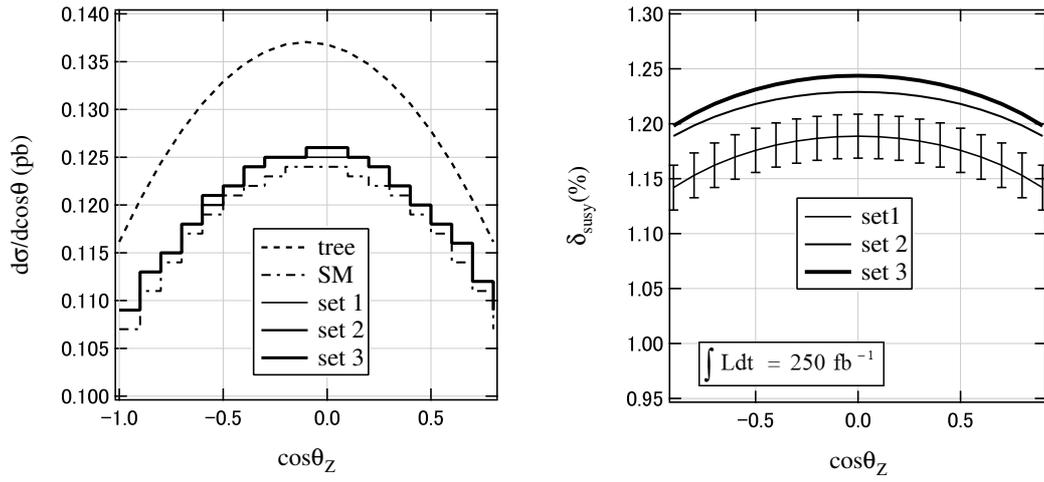


図 18: $e^-e^+ \rightarrow Zh$ の $\sqrt{s} = 250 \text{ GeV}$ における断面積および MSSM の 1-loop 補正比 δ_{susy} 。

5.4 Higgs 粒子の単独生成

5.4.1 1-loop 補正の必要性および各種チェック

図 19 に $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の 250 GeV における標準模型の 1-loop 補正比 δ_{NLO} を示す。横軸は Z の生成角である。+1.0~-5.0 %程度の対称で右肩下がりの結果となった。この値が誤差よりも大きいため、1-loop 補正の検証自体に意味があることが解る。また、ここでも、各種のチェックをクリアできたために物理的な意味のある結果であることが確認された。

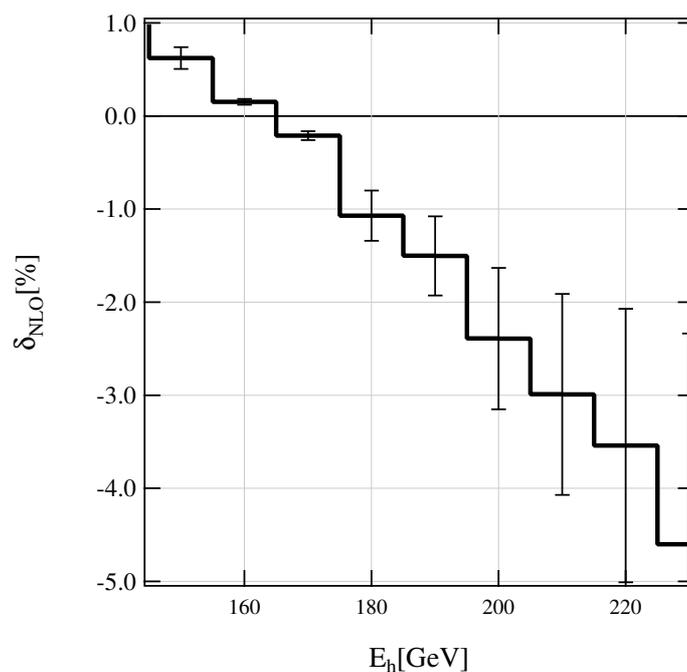


図 19: $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の $\sqrt{s}=500$ GeV における SM の 1loop 補正比 δ_{NLO} 。

表 10: $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ における gauge 不変性および繰り込み可能性のチェック。

(CUV,Lambda)	tree	loop	soft	sum
$(0, 10^{-17})$	0.00003506618	0.0000021364935	-0.000058649792	-0.000023043173
$(10, 10^{-17},)$	0.00003506618	0.0000021364935	-0.000058649792	-0.000023043173
$(10, 10^{-23},)$	0.00003506618778	0.000002136493594	-0.000058649792751	-0.000023043173973
$(0, 10^{-17})\text{NLGcheck}$	0.00003506618	0.0000021364935	-0.000058649792	-0.000023043173

5.4.2 改良点

プロセス $e^-e^+ \rightarrow \nu\nu h$ では次のプロセス $e^-e^+ \rightarrow \nu_e\nu_e h$ を計算すれば精度の高い近似になることが解っている。

$$\sigma(s) \equiv \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \sigma(e^-e^+ \rightarrow \nu_\ell\bar{\nu}_\ell h). \quad (5.82)$$

しかし、全ダイアグラム数が 10^4 にも上るため、一度に計算できない。そこで、有効 vector boson 近似 [29] という手法を用いた。

$$\sigma'(s) \equiv \sum_{n=-1}^{+1} \int_{x_{min}}^1 f_n(x) \hat{\sigma}_n(\hat{s}) dx, \quad (5.83)$$

ここで、 $\hat{s} \equiv xs$ であり、 $\hat{\sigma}_n(\hat{s})$ は 2 乗重心系エネルギーと素過程 $e^-W_n^+ \rightarrow \nu_e h$ の断面積である。ここで $x_{min} = (m_e + m_W)^2/s$ と設定した。 $f_n(x)$ はヘリシティ $n = -1, 0, +1$ の W_n boson のエネルギー分布関数である。

$$f_0(x) = (g_L^2 + g_R^2) \left(\frac{x}{16\pi^2} \right) \left[\frac{2(1-x)\zeta}{\omega^2 x} - \frac{2\Delta(2-\omega)}{\omega^3} \ln \left(\frac{x}{\Delta'} \right) \right], \quad (5.84)$$

$$f_{+1}(x) = g_L^2 h_2 + g_R^2 h_1, \quad (5.85)$$

$$f_{-1}(x) = g_L^2 h_1 + g_R^2 h_2, \quad (5.86)$$

ここで

$$h_1 = \frac{x}{16\pi^2} \left[\frac{-(1-x)(2-\omega)}{\omega^2} + \frac{(1-\omega)(\zeta - \omega^2)}{\omega^3} \ln \left(\frac{1}{\Delta'} \right) - \frac{\zeta - 2x\omega}{\omega^3} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right] \quad (5.87)$$

$$h_2 = \frac{x}{16\pi^2} \left[\frac{-(1-x)(2-\omega)}{\omega^2(1-\omega)} + \frac{\zeta}{\omega^3} \ln \left(\frac{x}{\Delta'} \right) \right], \quad (5.88)$$

である。ここで考えているエネルギースケールでは、以下のように W_0 のみを考えればよい。なぜなら W_\pm の寄与はほとんど無視できるほど小さいからである。

$$\sigma'_0(s) \equiv \int_{x_{min}}^1 f_0(x) \hat{\sigma}_0(\hat{s}) dx, \quad (5.89)$$

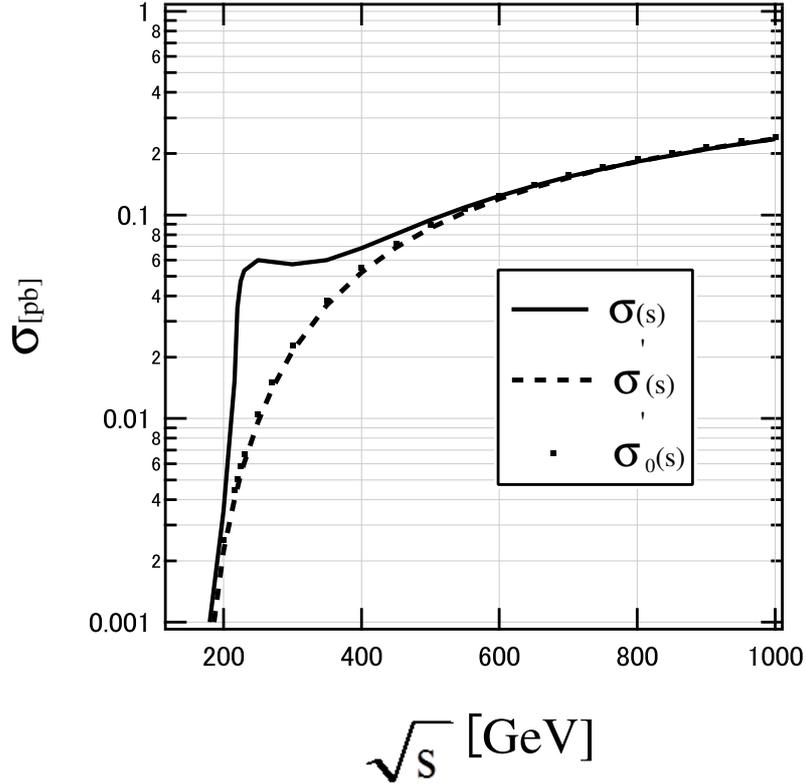


図 20: $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の全断面積の \sqrt{s} 依存性。直線と点線は それぞれ σ , σ' and σ_0 に対応。

図 20 に tree level 断面積 (5.82), (5.83) および (5.89) の \sqrt{s} 依存性を示した。 $\sqrt{s} = 250$ GeV でのピークは $e^-e^+ \rightarrow Zh$ の寄与によるものである一方でそこでは全断面積が最も大きいからである。一方で、 W -fusion の寄与が領域 $\sqrt{s} \gtrsim 500$ GeV では支配的である。そして EWA がよい近似になっている。例えば $\sqrt{s} = (500, 1000)$ GeV では $(\sigma - \sigma')/\sigma \simeq (-8.4, +0.75)\%$ であり $(\sigma - \sigma_0)/\sigma \simeq (-4.7, +3.2)\%$ である。 $\sqrt{s} = 500$ GeV では次のようにみなせる。

$$d\sigma_{\text{tree,1loop}} = \left(\frac{d\sigma'_0}{dE_h} \right)_{\text{tree,1loop}}, \quad (5.90)$$

ここで E_h は Higgs 粒子のエネルギーである。これは (5.89) から計算され、次の関係から計算される。図 21 では tree level の $d\sigma/dE_h$ および $d\sigma'_0/dE_h$ のエネルギー分布を示した。統計誤差は $L=500\text{fb}^{-1}$ を仮定している。これらの差が $E_h=150\sim 230$ GeV では誤差より小さいため、EWA が $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ を再現するよい近似になっていることが解る。また、250 GeV 付近の Zh のピークは EWA では再現できないことが解る。

$$x \equiv \hat{s}/s = \frac{1}{s} \left(E_h + \sqrt{E_h^2 - m_h^2} \right). \quad (5.91)$$

この積分を実際に行う際に、最初に行った改良は GRACE 内部で一貫して、Higgs 粒子のエネルギー分布までを算出できるようにしたことである。これは GRACE のメインプログラムの中に上記の関数を直接書き込むことで実現した。図 21 に示されているのは、EWA の

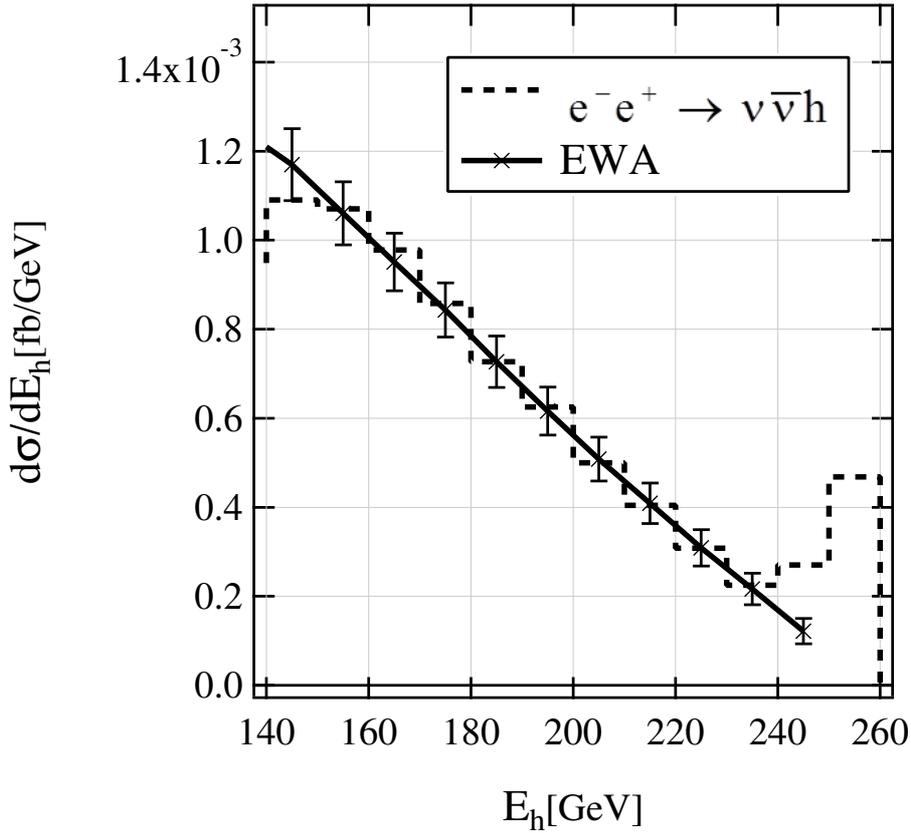


図 21: EWA の妥当性。 $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の tree level Higgs の生成エネルギーへの依存性の有効 Wboson 近似と Born 近似 (tree) の比較。

tree level における実現できた精度である。250GeV 付近で Zh によるピークが現れているが、これは EWA では再現できないので、240GeV までを解析の対象とした。また、tree level で、モンテカルロ積分の結果と整合性のとれた EWA の積分を実現することが次の難関であった。(1-loop では EWA のモンテカルロ積分が成功しなかったため、実行ファイルの中に do loop 文を書くことで結果を得る手法を採用した。) このとき、GRACE 内部の積分変数が 5 つ発生するが、実際の物理パラメーターとの対応関係がよくわかるものは Higgs 粒子の生成角 $\cos\theta$ と生成エネルギー E_h であるため、生成角を 450 分点とり E_h を 13 分点とって、 E_h に対して $\cos\theta$ の積分を行った。矩形近似の積分では十分な精度がでなかった。このため、台形公式を用いた。また二重指数関数型積分 (DE) を同時に用いた。この結果が図 22 に示されている。この結果 $\mathcal{O}(0.1)\%$ 程度の精度が達成できたのでこれを最終的な数値結果とした。また、断面積の計算においては Higgs の生成角や制動放射による photon のエネルギーをある値で切り捨てる、という作業が必要になる。運動学的な関数は 1 カ所にわかりやすく書かれていると言うよりむしろ、いくつものファイルに渡り書かれている。正確に望むとおりのカットを入れるために、試行錯誤し、確からしい値を得ることができた。

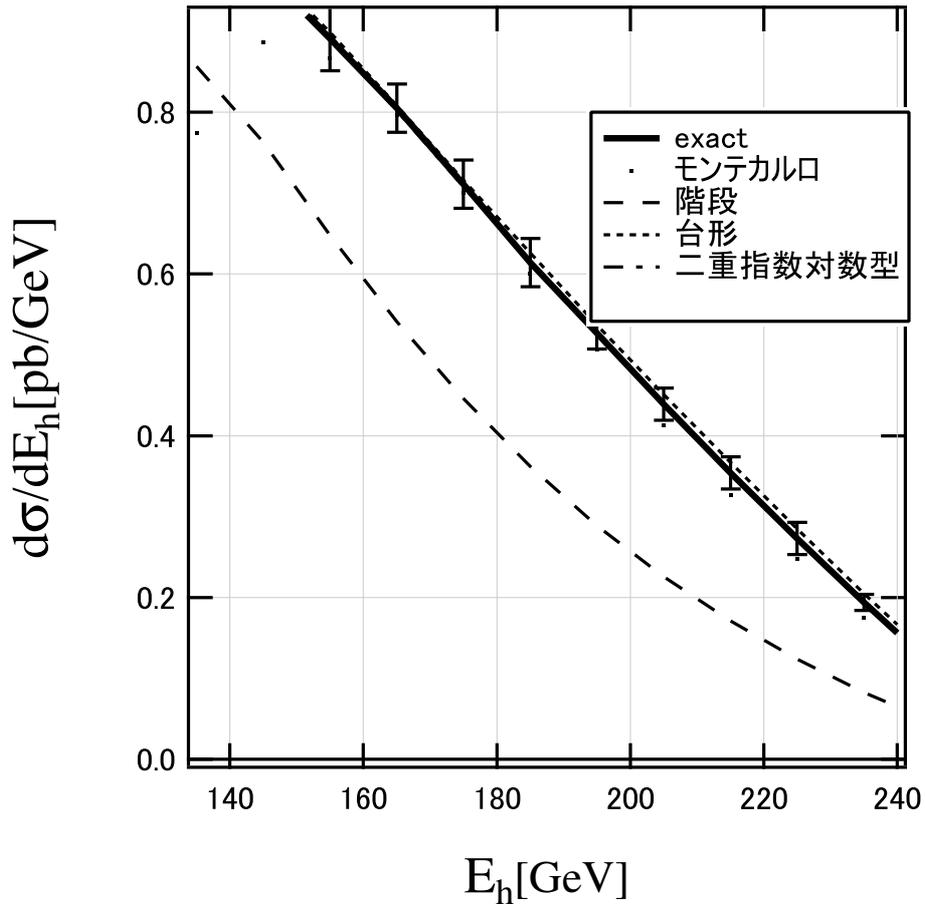


図 22: EWA を用いた $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の tree level の断面積の計算における、積分手法の比較。exact は近似を用いない場合の断面積。

5.4.3 数値結果

図 23 に $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の 500 GeV での結果を示す。左の図が微分断面積であり右の図が δ_{susy} を表す。左の図から解ることは、tree に対して SM, MSSM とともに、負の 1-loop 補正値を持つということであり、右の図から解ることは統計誤差と比較して、MSSM の 1-loop 効果は 1.67~1.58% の値を持ち「検証可能」であることである。特筆すべきこととしては set 間の区別は不可能であるということである。

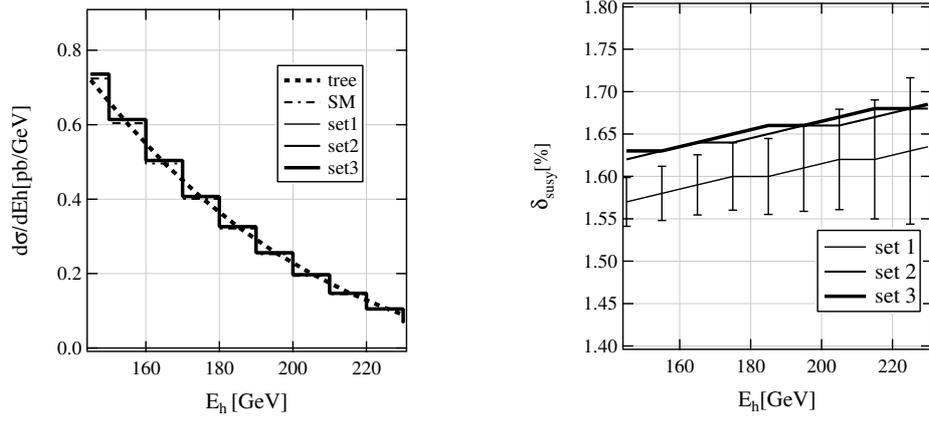


図 23: $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}h$ の $\sqrt{s}=500$ GeV における断面積および補正比 δ_{SUSY} 。

5.5 LHeC におけるプロセス $e^-P \rightarrow hX$

5.5.1 1-loop 補正の必要性および各種チェック

図 24 にこのプロセスにおける δ_{NLO} の結果を示す。-2%~-12% への右肩上がりの結果となった。誤差と比べ全域的に大きい値を持つのでこの後 MSSM と標準模型の差を検証することに意味がある事が解る。また、ここでも、各種のチェックをクリアできたために物理的な意味のある結果であることが確認された。

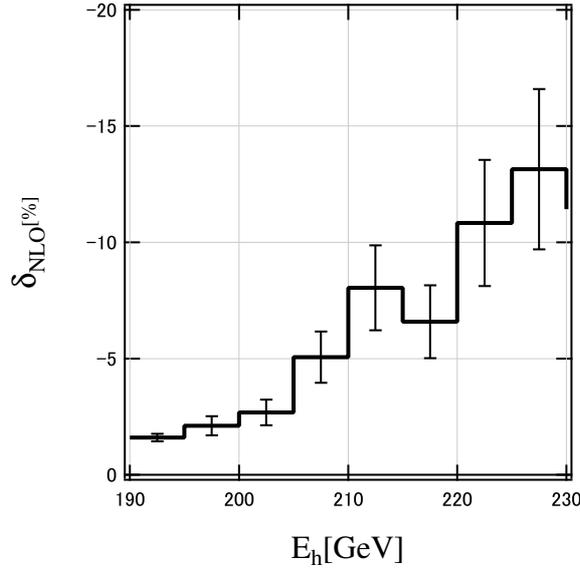


図 24: $e^-P \rightarrow hX$ の標準模型の 1-loop 補正比 δ_{NLO} 。

表 11: $e^-P \rightarrow hX$ の近似計算における素過程 $Wu \rightarrow hd$ の gauge 不変性および繰り込み可能性のチェック。

(CUV,Lambda)	tree	loop	soft	sum
(0, 10^{-17})	0.53063611	4.10362245	0.4789585	5.11321715
(10, 10^{-17})	0.53063611	4.10362245	0.4789585	5.11321715
(10, 10^{-23} ,)	0.53063611	3.8299629	-0.75261812	5.11321715
(0, 10^{-17})NLG check	0.53063611	4.10362245	0.4789585	5.11321715

5.5.2 PDF の組み込み

本研究の目的は MSSM の 1-loop 効果を検証することであるから、始状態が陽子、電子であり、終状態が Higgs、quark である過程の断面積を 1-loop level で検証する必要がある。GRACE では、始状態にオプションとして直接陽子を選択することはできないため、Parton Distribution Function(PDF)を用いる必要がある。これは陽子内部の構造について得られた実験値をもとに、それぞれの quark が「縦運動量の逆数」X に対してどれだけの割合

で分布しているかを表した関数で、QCD 計算の微妙な誤差について数百通り書かれたプログラムパッケージが存在する。本研究では CT14NNLO[30] というパッケージを用いた。ここで PDF の組み込みが正しく行われているかをチェックするために、HERA における先行研究との比較を行った。図 25 の横軸 M_h は Higgs の質量、縦軸は全断面積である。(WW fusion、ZZ fusion) とは内線で (W, Z) が融合するグラフの寄与を計算したものであり sum がその合計である。 $E_p = 1\text{TeV}$ とは始状態の陽子のエネルギーを 1TeV に設定して計算されたもので、これらのいずれも右肩下がりの傾向にあり 1fb から 10fb 程度の値を持つ。この結果は先行研究と $\mathcal{O}(1)\%$ の精度で一致する。

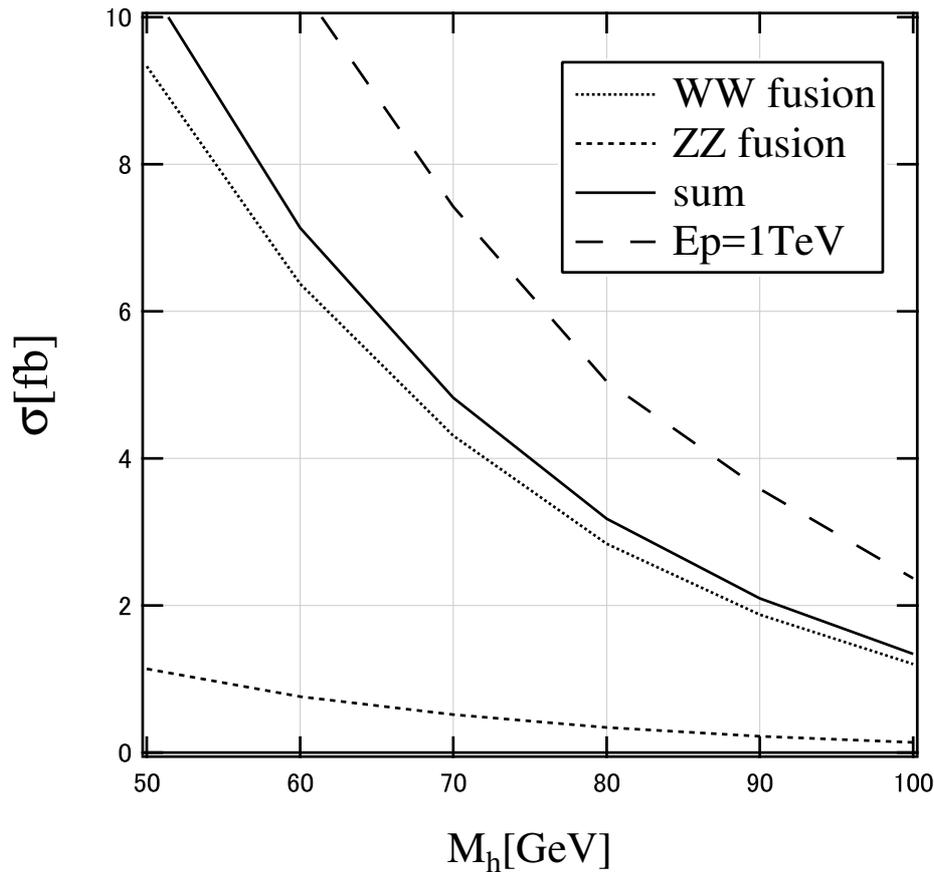


図 25: HERA のシミュレーション結果。 $e^-p \rightarrow hX$ の tree level Higgs の質量への依存性。 $(E_e, E_p) = (30, 820 \text{ GeV})$ 。

5.5.3 EWA と PDF の同時組み込み

また前章で述べた EWA を PDF と同時に用いる計算が tree level で成立するかどうかのチェックも行った。この計算を表現するのは以下の等式である。

$$\sigma_{\text{SM,MSSM}}^{\text{tree}}(s) = \int_{x_{1\text{min}}}^1 \int_{x_{2\text{min}}}^1 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \sigma_{\text{SM,MSSM}}^{\text{tree}}(\hat{s}) \quad (5.92)$$

ここで、左辺の断面積 $\sigma_{\text{SM,MSSM}}^{\text{tree}}(s)$ は目的の $ep \rightarrow hX$ の断面積であり、右辺の $\hat{\sigma}_{\text{SM,MSSM}}^{\text{tree}}(\hat{s})$ はいわゆる「素過程」と呼ばれる近似のない断面積である。ここではこれは $Wu \rightarrow hd$ の断面積に相当し、この部分が GRACE でシンプルに計算できる部分である。右辺の $f_1 f_2$ はそれぞれ EWA, PDF に相当する。左辺の量の具体的な計算結果を以下図 26 に示す。横軸は Higgs の生成エネルギーであり、この値が静止質量 125 GeV と同じ時に最も高い断面積を示し、そこをピークとして、いずれも右肩下がりの傾向を示した。(EWA、EZA) がそれぞれ (W , Z) の分布関数を用いた計算に該当し、 W fusion (Z fusion) の意味は同じである。ここから読み取れるのは全体の合計 sum に対して、 W fusion のみで十分な近似になっていることおよび、EWA と PDF を同時に組み込んだ計算が全体の合計に対し十分な精度を持つことである。

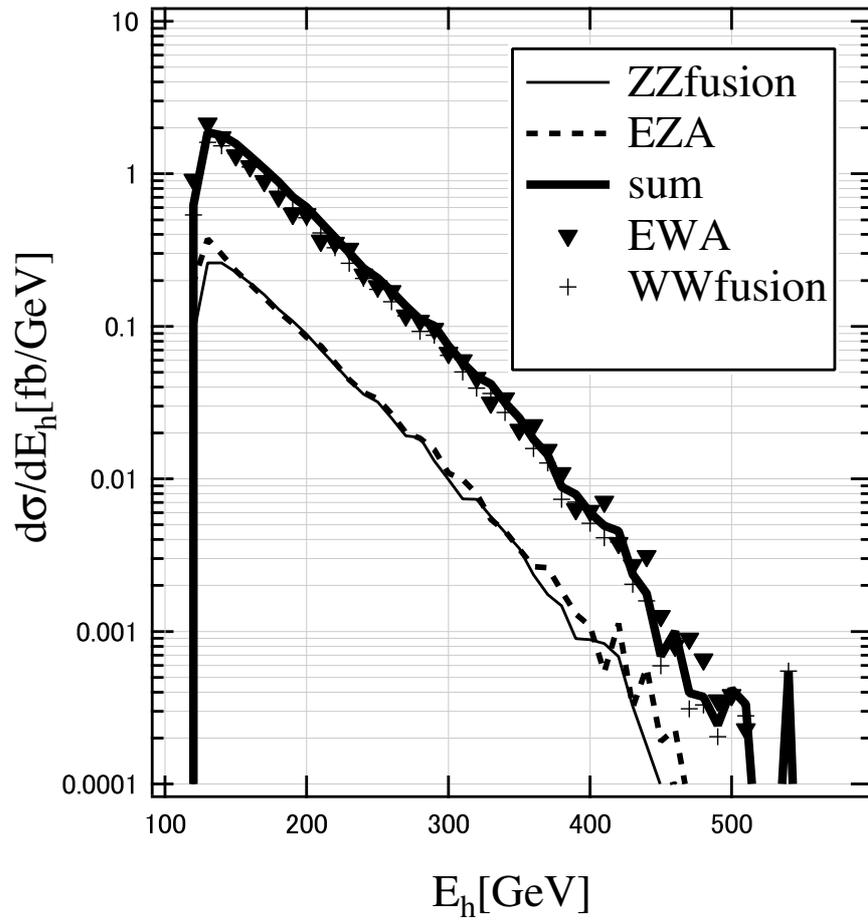


図 26: LHeC のシミュレーション。CT14PDF と EWA の GRACE への同時取り込みのテスト。 $e^-p \rightarrow hX$ の tree level での Higgs の生成エネルギーへの依存性。 $(E_e, E_p) = (60, 7000 \text{ GeV})$ 。

5.5.4 積分方法の考案

1-loop ダイアグラムはやはり素過程とはいえ膨大な数に上るので、1-loop 計算にこの2重積分をそのまま適用するのは、見通しの悪いやり方である。そこで、本研究では、簡単な変数変換を行い、次の微分断面積を求めた。

$$d\sigma(s)/dX = \hat{\sigma}_{\text{SM,MSSM}}^{1\text{-loop}}(Xs) \int_X^{1/X} f_1(X,Y)f_2(X,Y)dY/2Y \quad (5.93)$$

ここで、 $\hat{s} = Xs, X = x_1x_2, Y = x_1/x_2$ である。右辺の積分を $W(X)$ と呼ぶことにするとこの関数を用意しておけば、ep 散乱の計算に常に役に立つだろう。図 27 に3通りのヘリシティでの Eh に対する $W(X)$ の分布を示した。また、この積分因子を用いて近似した結

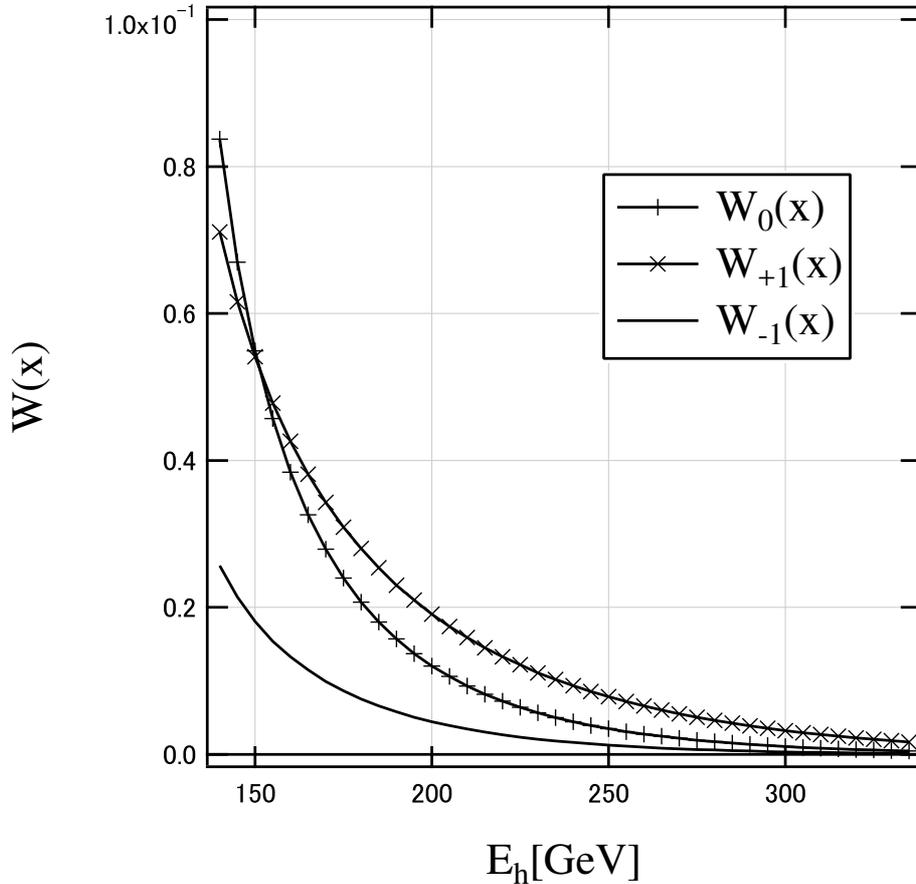


図 27: eP 散乱に固有の関数 $W(x)$ 。 $W_{-1,0,1}$ はそれぞれのヘリシティにおける値。

果を以下の図 28 に示す。ここから、ヘリシティ 0 の場合のみを考えれば全体の精度の高い近似になる事が解る。また、最終的に 1-loop の検証で、この $W(x)$ を用いた近似のほか先述した 2 重積分を行い得る可能性として、モンテカルロ積分を用いずに手動での積分を行えば、無理なく望む結果が得られる可能性があると考え、tree level で、その可能性を試したのが以下の図 29 である。この結果、手動での積分ではより不定性の少ない結果を得ることができた。ここで追記しておきたいが、MSSM の 1-loop 効果を検証する上で、因

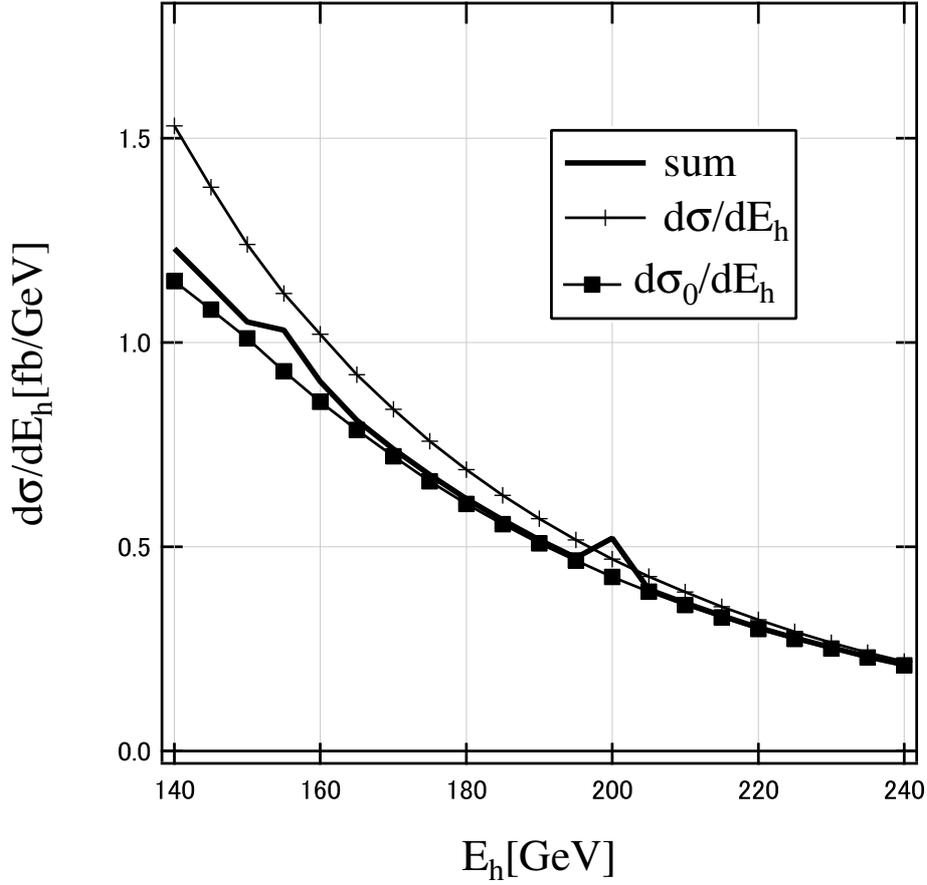


図 28: LHeC のシミュレーション。 $e^-p \rightarrow hX$ の tree level での Higgs の生成エネルギーへの依存性. の因子 $W(x)$ を用いた因子化近似。 σ_0 が $W_0(x)$ を用いた場合であり、 σ はすべてのヘリシティの合計。 $(E_e, E_p) = (60, 7000 \text{ GeV})$ 。

因子化近似を考えるなら、

$$\delta_{\text{susy}} = (\sigma_{\text{MSSM}}^{1\text{-loop}} - \sigma_{\text{SM}}^{1\text{-loop}}) / \sigma_{\text{tree}} = (\sigma_{(\text{loop}+\text{soft}+\text{hard})_{\text{MSSM}}}^{\text{sub}} \times W(x) - \sigma_{(\text{loop}+\text{soft}+\text{hard})_{\text{SM}}}^{\text{sub}} \times W(x)) / \sigma_{\text{tree}} \times W(x) \quad (5.94)$$

となるので、分子分母において $W(x)$ がキャンセルされる。よって素過程の MSSM と SM の $\sigma_{(\text{loop}+\text{soft})}$ の差を見れば、1-loop 効果を見積もることができる。第 11 章の結果ではこのことを踏まえて計算されたものである。

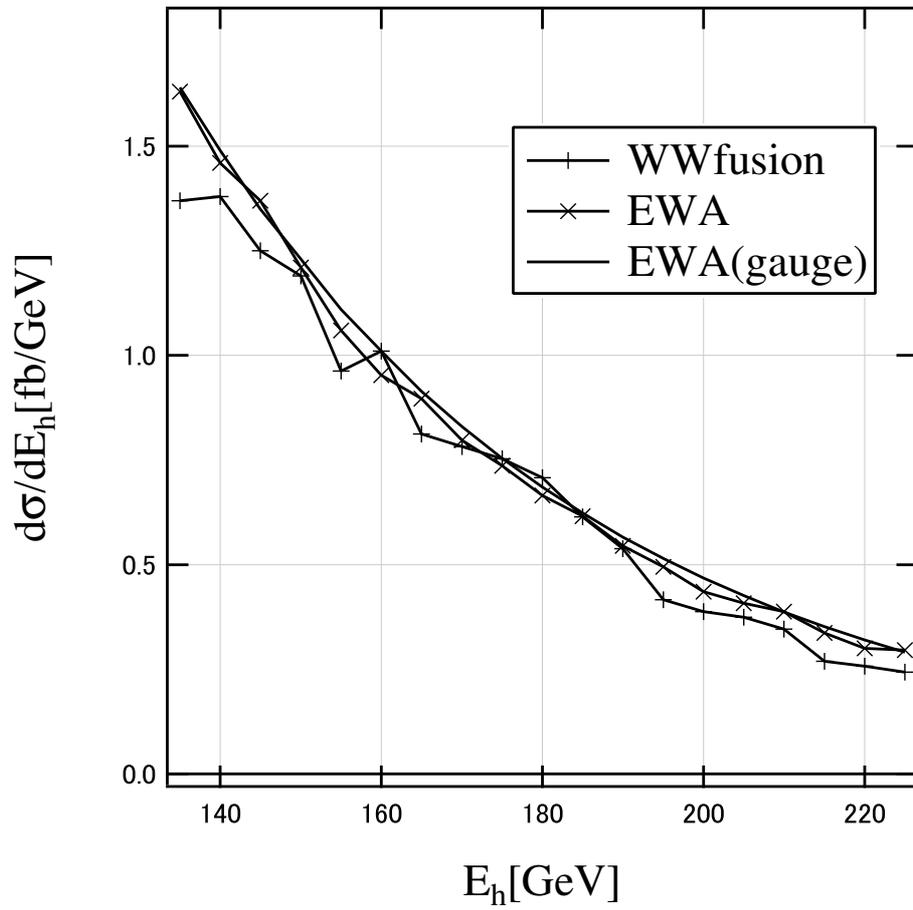


図 29: LHeC のシミュレーション。モンテカルロ積分と手動で積分を行った場合の比較。 $e^-p \rightarrow hX$ の tree level での Higgs 粒子の生成エネルギーへの依存性。EWA がモンテカルロ積分を 2 重積分内の断面積に対して行った場合であり、EWA_{gauge} が手動での積分。 $(E_e, E_p) = (60, 7000 \text{ GeV})$ 。

5.5.5 数値結果

表 12 に LHeC の補正比のみの結果を示す。横軸は Higgs 粒子の生成角である。結果は予備的なものであるが、Higgs の生成エネルギーが 165 GeV と 175 GeV の場合を示した。補正比の絶対値が統計誤差とほぼ同じであることから、1-loop 効果の検証は期待できないと言えるだろう。

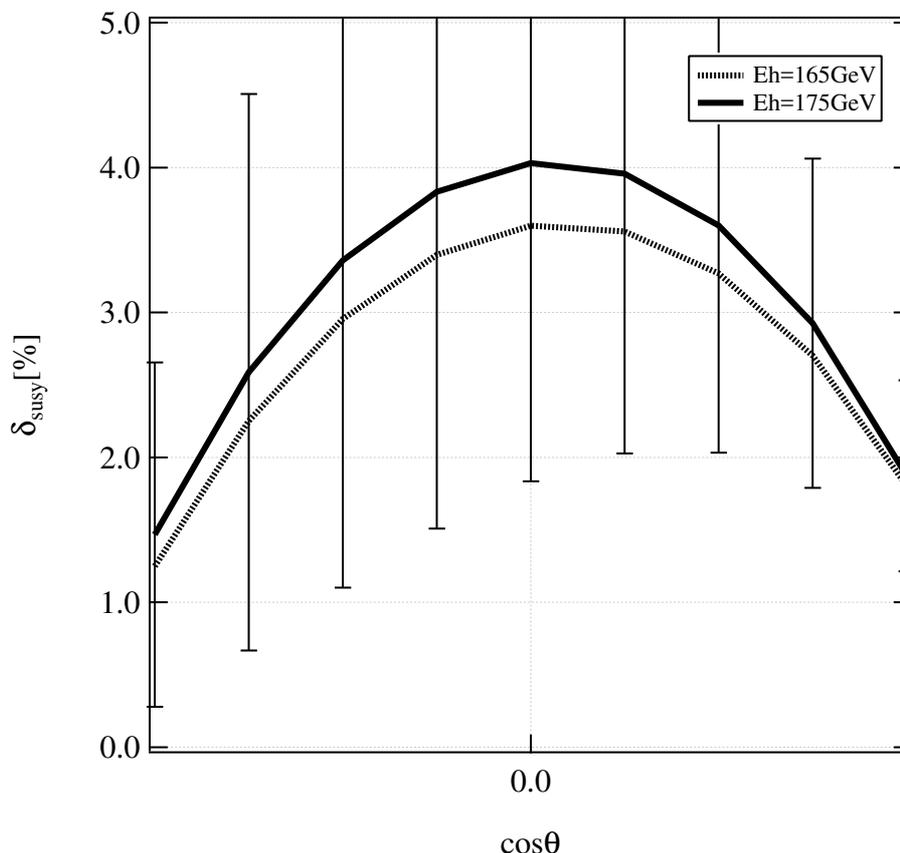


図 30: $e^-p \rightarrow hX$ の 1-loop level での断面積と補正比の Higgs 粒子の生成エネルギーへの依存性。(E_e, E_p)=(60,7000 GeV)。

5.6 総合的な考察

表 12 に ILC と LHeC の大まかに期待できるルミノシティと断面積、イベント数の関係性を整理してみると以下の表のようになる。本研究の結果を大きくまとめれば、超対称性粒子の 1-loop の効果は ILC では見えやすいが LHeC では見えにくいということである。tree の断面積とデザインルミノシティの関係から見当がつく誤差の大小関係を考えれば、意外な結果ではないといえるだろう。また、set 間の区別ができるプロセス 500 GeV の $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ を見れば、軽い第 3 世代 squark(stop, sbottom) の情報を引き出せる可能性が高

いだろう。対照的に $e^+e^- \rightarrow Zh$ を見ることで重い第3世代 squark(stop,sbottom) の情報を引き出せる可能性が高いだろう。

表 12: 両加速器における、各プロセスにおける期待できる断面積とイベント数。

process	\sqrt{s}	Luminosity	cross section	event
τ 対生成 (ILC)	(250,500)GeV	(250,500)fb ⁻¹	(2.5, 0.6)pb	(615000, 300000)events
<i>bottom</i> 対生成 (ILC)	(250,500)GeV	(250,500)fb ⁻¹	(2.5, 0.6)pb	(615000, 300000)events
<i>top</i> 対生成 (ILC)	(500)GeV	(500)fb ⁻¹	(0.6)pb	(300000)events
Higgs Z 随伴生成 (ILC)	(250)GeV	(250)fb ⁻¹	(0.25)pb	(61500)events
Higgs 単独生成 (ILC)	(500)GeV	(500)fb ⁻¹	(80)fb	(40000)events
Higgs 単独生成 (LHeC)	(1300)GeV	(100)fb ⁻¹	(0.2)pb	(20000)events

6 結論

本研究では、超対称性粒子が仮想粒子として振る舞う 1-loop 効果が ILC および LHeC で統計的に検証できる可能性があるかどうかを探った。1-loop 効果は Fermion 対生成でも Higgs 粒子生成でも検証可能であり、両プロセスのすべての結果が実験的に確認されれば標準模型からのずれが MSSM の効果によるものだと断定できる可能性もあるだろう。この結果を得るためにために宇宙論的観測事実、大型加速器実験結果、および各種低エネルギー実験の結果から、MSSM の質量スペクトラムを絞り込み、6つのセットを提案した。これらのセットの下で具体的に散乱断面積を計算し、1-loop 効果を検証した。1-loop 補正を計算するパッケージとしての GRACE は未だ開発段階であるので、様々な改良を行った。ILC での top quark 対生成では、標準模型の 1-loop を計算する上での繰り込みの扱いの不完全性に対し、同量を計算する別の手法を考案し実行した。Z を伴った Higgs 生成では総ダイアグラム数が多い場合に、近似方法をとらずに、ダイアグラムをいくつかのグループに分けて実行ファイルを作成する手法を考案した。単独 Higgs 生成 (ILC, LHeC) では EWA と PDF を GRACE に組み込む手法を開発した。EWA は一度にモンテカルロ積分を実行することは成功しなかったため、この目的に適した積分変数に関する微分断面積を計算する手法を開発した。この時に手動で積分を行うには計算時間との兼ね合いで分点数に限りがあるので少ない分点で十分な精度を出すことができる積分手法を探った。階段型では十分な精度が得られないことが確認され、台形公式で十分な精度が期待できることが確認された。また二重指数関数型積分を同時に用いると高い精度が実現できる事も解った。LHeC の EWA と PDF の同時組み込みの試みでは、tree level では 2 変数の積分を実行する手法を確立できたものの、1-loop では成功しなかったため、2重積分内の素過程の断面積を分離するために変数変換された関係式を用い、このときに発生する新たな因子関数が明らかになった。この関数は最終的な MSSM のシグナルの比の算出の際に標準模型と tree の計算 (分子、分母) の両方に含まれるためキャンセルすることができるので、最終的な MSSM の 1-loop 補正比の算出以外の、断面積そのものの算出に有効であることが解った。ILC における最も重要な結論としては、第 3 世代の squark が重い場合、または軽い場合でも、異なったプロセスを見れば、一定の情報が得られる可能性がある事が明らかとなった。

A 理論的背景の詳細

A.1 場の量子論

この章では、素粒子現象論の理論的背景について述べる。始めに1粒子に関して場の量子論で計算される量について述べ、それがどのように、実際の大型加速器などの実験における観測量と関連づけられるかについて述べる。素粒子現象は主に3つの「問題」を取り扱う。

- (1) 散乱
- (2) 衝突
- (3) 束縛状態

である。このうち(3)は閉じ込められた quark がハドロンを構成するなどの現象を扱うもので、このような場合の計算は、例えば「相互作用が無限時間で消えるという仮定」がおけるかどうか定かでないなど、非常に理論的な不定性が大きいので、(1)(2)に限って議論を進めるとする。

A.2 量子系の時間発展の記述

場の量子論での「第2量子化」と呼ばれる系の量子化は、ある時刻 t_0 での場の量の同時刻(反)交換関係、

$$[\pi_a(x), \phi_b(y)]_{x^0=y^0(=t_0)} = -i\delta_{ab}\delta^3(x-y) \quad (\text{A.95})$$

を設定することで行われる。その後、得られた場の演算子をフーリエ展開し、その係数として現れる生成演算子を用いて状態を構成する。ここで重要なのが、相互作用を含むような過程における系の時間変化である。実験においては当然実際に相互作用が起こるので、起こる変化の確率を記述できる、矛盾のない理論体系が必要になってくる。系の時間発展の代表的な描像は次の3つである。

- (1) Schrödinger 描像
- (2) Heisenberg 描像
- (3) 朝永 Dirac 描像

この3つの描像に対して、具体的な摂動展開を議論する。

A.3 S行列と伝播関数

素粒子実験では始状態の粒子運動量を確定し、終状態もやはり運動量が確定した反応を調べ、粒子生成に関する情報を実験から取り出す。この際に始状態と終状態の運動学については議論の焦点になることはなく、その中間にある系の時間発展や遷移確率振幅

$$\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) \quad (\text{A.96})$$

を調べるのが議論の焦点となる。これらを「生成演算子」と「真空状態」で書き表す、ということが、「場の量子論」で計算する、ということである。この過程を具体的に述べるな

ら：時刻 $t = t_i = -\infty$ の始状態 ψ_i が、相互作用の後に、時刻 $t = t_f = +\infty$ の終状態 ψ_f にどのように変化するかを調べる、という形をとる。出発点となる量子化の時刻 $t = t_i$ で始状態 $|P_1(p_1)P_2(p_2)\rangle$ は場 $\phi_0(x) = \phi(x, t_i)$ の生成演算子を用いて $|a_1^\dagger(p_1)a_2^\dagger(p_2)\rangle$ と表せる。この系が、時刻 $+\infty$ でどう変化しているのかを表すのが「S 行列」である。Schrödinger 描像で考えるために、状態の変化を表す Schrödinger 方程式、

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle \quad (\text{A.97})$$

を $|\Psi(t = t_i)\rangle = |\Psi_i\rangle$ という境界条件で解くと、時刻 $t = t_f (= +\infty)$ における状態が、

$$|\Psi(t_f)\rangle = e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{A.98})$$

と得られ、遷移確率振幅は、

$$\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{A.99})$$

で与えられる。 $H = H_0$ エネルギーを E_i として、この振幅をべき展開していくと、

$$\langle\Psi_f|e^{-iH_0(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle = |e^{-iE_i(t_f-t_i)}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle \quad (\text{A.100})$$

となり、 $e^{-iE_i(t_f-t_i)}$ という余分な位相因子が出てくる。この余分な因子を取り除くために

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{A.101})$$

という演算子を定義する。これは系の時間発展を記述し、 $H_i = 0$ の時には、

$$S = 1 \quad (\text{A.102})$$

となり、余分な因子を出さない演算子となる。この演算子は、

$$SS^\dagger = 1 \quad (\text{A.103})$$

のユニタリ関係を満たす、「S 行列演算子」と呼ばれる。この S 行列を、よく理解するためには、「漸近場」(Asymptotic field) と呼ばれる概念が有用である。Heisenberg 描像で同じことを考える。Heisenberg 場 $\phi(x)$ は特別な束縛状態などを考えない限りは、 $t = \pm\infty$ では、自由 Heisenberg 場になっており、これを「漸近場」とよぶ。この描像では、 $t \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$ にそれぞれ $\phi_{in}(x), \phi_{out}(x)$ が対応する。

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\phi(x) - \phi_{in}(x)] = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} [\phi(x) - \phi_{out}(x)] = 0 \quad (\text{A.104})$$

この漸近場の生成消滅演算子表現は、

$$\phi_{in}(x) = \int d^3p [a_{in}(p)e^{-ipx} + a_{in}^\dagger(p)e^{ipx}] \quad (\text{A.105})$$

$$\phi_{out}(x) = \int d^3p [a_{out}(p)e^{-ipx} + a_{out}^\dagger(p)e^{ipx}] \quad (\text{A.106})$$

で与えられる。そこに含まれる生成演算子 $a_{in,out}^\dagger(p)$ から構成される、状態をそれぞれ、 $|\Psi, in\rangle, |\Psi, out\rangle$ のように書く。これを用いると、 $|\alpha, in\rangle \rightarrow |\beta, out\rangle$ という変化を記述する S 行列の $\beta\alpha$ 成分は、

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle \quad (\text{A.107})$$

と定義され、また S 行列演算子は

$$\langle \beta | out | = \langle \beta, in | S \quad (\text{A.108})$$

と定義される。このように導入された S 行列演算子が、Schrödinger 描像でのそれと同じものであるかどうかを以下に確認する。Heisenberg 演算子の時間発展は、

$$\phi(x, t_2) = e^{-iH(t_2-t_1)} \phi(x, t_1) e^{iH(t_2-t_1)} \quad (\text{A.109})$$

に従うが、

$$\phi(x, t_i) = \phi_{in}(x, t_i), \phi(x, t_f) = \phi_{out}(x, t_f) \quad (\text{A.110})$$

だから、

$$\phi_{out}(x, t_f) = e^{(t_f-t_i)H} \phi_{in}(x, t_i) e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{A.111})$$

である。一方、 $\phi_{in}(x)$ という自由 Heisenberg 場自身の時間発展は、

$$\phi_{in}(x, t_f) = e^{-iH_0(t_f-t_i)} \phi_{in}(x, t_i) e^{iH_0(t_f-t_i)} \quad (\text{A.112})$$

で与えられる。従って、

$$\begin{aligned} \phi_{out}(x, t_f) &= e^{iH(t_f-t_i)} e^{-iH_0(t_f-t_i)} \phi_{in}(x, t_i) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \\ &= [e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1} \phi_{in}(x, t_i) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

より、

$$a_{out}(p) = [e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1} a_{in}(p) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{A.114})$$

が得られる。一方、漸近場による S 行列の定義により、

$$\begin{aligned} \langle \beta, out | a_{out}(p) | \alpha, in \rangle &= \langle \beta, in | a_{out}(p) | \alpha, in \rangle \\ \langle \beta, out | a_{out}(p) | \alpha, in \rangle &= \langle \beta p, out | \alpha, in \rangle \\ &= \langle \beta p, in | S | \alpha, in \rangle = \langle \beta, in | a_{in}(p) S | \alpha, in \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

となるが、結局、

$$a_{out}(p) = S^{-1} a_{in}(p) S \quad (\text{A.116})$$

となる。従って確かに

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{A.117})$$

が成立している。摂動計算では次の伝播関数 (Propagator) もまた重要な役割を果たす。scalar 場の場合これは、

$$\Delta_F(x-y) = i \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (\text{A.118})$$

と定義される (ここでは自由 Heisenberg 場を用いて表されている)。また、T は時間順序積とよばれ、時間依存演算子を時間順序に並べ直して掛けることを意味し (ただし、ここではボース演算子の例)、

$$T[A(x)B(y)C(z)] = B(y)C(z)A(x) \quad (\text{A.119})$$

で表される。 ϕ が Klein-Gordon 方程式 $(\square + m^2)\phi(x)$ を満たす場である時、伝播関数は Klein-Gordon 演算子の Green 関数になる。

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x) \quad (\text{A.120})$$

実際の摂動計算に重要になってくるのは、 $\Delta_F(x)$ のフーリエ展開、

$$\Delta_F(q) = \int d^4x e^{iqx} \Delta_F(x) \quad (\text{A.121})$$

であり、複素積分によりこれは

$$\Delta_F(q) = \frac{1}{m^2 - q^2 - i\epsilon}, \quad (\text{A.122})$$

または

$$\Delta_F(q) = (1/2\pi) \int \frac{1}{m^2 - q^2 - i\epsilon} \quad (\text{A.123})$$

と表すことができる。

また、結論のみを示せば、朝永 Dirac 描像の S 行列は、

$$S = T \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_{int}(x)\right] \quad (\text{A.124})$$

と表されることが知られている。

A.4 ビーム強度を考慮した相互作用

ここまでの議論で、素粒子の相互作用を実際に計算することは可能になったのであるが、これはあくまで 1,2 粒子が生成、消滅する様子を記述したに過ぎない。このような記述方法を実際の実験と比較するのは現実的ではない。そこで、大型加速器の莫大なビーム強度 (Luminosity) を考慮できるような物理量を定義する必要がある。

$$N = \sigma L \quad (\text{A.125})$$

この表式の意味は「生成事象数＝反応の起こる確率×衝突頻度」である。ILCで、電子と陽電子が衝突し、Higgsが生成される、という反応を例にとれば、 N は生成されるHiggsの数である。 L がLuminosityと呼ばれる加速器の性能に依存する量であり、電子と陽電子のビームをどれだけ粒子密度の高いものにできるかという測度であり、単位は fb^{-1} という、断面積の逆数である。ILC実験は非常に大規模で、巨大な国家予算をかけて行われる実験であるので、最終的な観測量である σ 以外の要素はほぼ完全に制御できる見通しを立てて行わなければならない。そこで、このルミノシティと呼ばれる量を期待されている水準まで引き上げる努力をしなければならない。これは純粋に技術的な問題である。また、最終的な観測量である σ は、大きく分けて、運動学により正確に予測できる部分と、「行列要素」とよばれる相互作用を扱う部分からなる。

$$d\sigma/d(\text{variable})|_{\text{cm}} = (\text{kinematics})(\mathcal{M}) \quad (\text{A.126})$$

前者は自明であるため、通常問題にされることはない。この部分は始状態と終状態を決定すれば、tree levelの近似であれ、標準模型による後述する摂動展開の第2項を含む計算であれ、MSSMであれ、共通である。問題は「行列要素」であり、この部分では、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用における3種類の結合定数に基づく相互作用が実際に起こる。この部分の計算は非常に煩雑かつ膨大であるため、この用語を作ったHeisenbergの時代には、この部分は計算不能、解釈不能であった。しかしながら、本研究で扱うプロセスのように始状態も終状態も標準模型の粒子であるような場合、MSSM粒子が関与してくる可能性があるのは、この「行列要素」だけである。この部分をもれなく正確に計算できるのであれば、そこにMSSMの効果がわずかではあるかもしれないが見て取れる可能性がある。

A.5 摂動論による計算

では、この「行列要素」をどうやって解体し計算するか。その答えを与えてくれたのがFeynmanによる「伝播理論」である。これは相対論的な量子力学として相互作用を扱うことに成功した最初の理論であり、この理論による計算手法はFeynman則としてまとめ上げられている。純粋に現象論の立場から言えば、ある模型が定義可能であるというのは、そのLagrangianが分かっているということである。これは、相対論的時空の中での可能な全経路に対しての積分がLagrange形式ではよく定義されているからである。もちろんこれがFeynman則に他ならない。その理論がどんなものであれ、どんな種類の粒子を含むものであれ、Lagrangianの運動項、質量項、相互作用項が分かっているならば、有限時間内に実際の物理量を計算できる。逆に、人類はこれらが定義できない「理論」から実際の物理量を計算する相対論的量子力学の枠組みを持っていない。ここまでをまとめると、

- (1) 加速器実験で実際に観測される量は散乱断面積「 σ 」である。
- (2) そのなかで、不確定なのは「行列要素」とよばれる相互作用を扱う部分でありMSSM粒子の相互作用はここで起こる。
- (3) それは「Feynman則」で計算可能である。

(4) Feynman 則は、ある模型の Lagrangian から、実際の物理量を計算する手続きである。それゆえに、「断面積を精密に計算する」ということは、この「Lagrangian の全経路での積分」を精度よく行うことである。

この積分は定式化されており、scalar 場を例にとれば、

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi \exp(\mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{free}} + \phi(x)J(x)) \quad (\text{A.127})$$

と表せる。これは「遷移振幅の経路積分表示」と呼ばれる。ここで、 Z を生成汎関数と呼ぶ。右辺の指数の肩はまさに Lagrangian であり、この部分は模型に応じて変わる。第 3 項は「外場」に対応する。ここで求める量が Z で表されるのは温度のある系への応用が現在知られているからであるが、本研究で扱うこの量は当然ながら温度という自由度は持っていない。本分野ではこの量は「Feynman 核」とよばれ、

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f | U(t_f, t_i) | q_i \rangle \quad (\text{A.128})$$

で表される。 U は時間発展演算子である。この時間を「虚時間」と見立てることで有限温度の場の理論へ応用され、また、「温度」(β) と見立てることで分配関数になる。このつながりにどのような深遠な「意味」があるのかは、本研究の本題を超える。また、この (113) 式の相互作用に相当する部分を自由場および外場の部分と別に扱い、べき級数展開していくことで、精度が向上するという考え方を「摂動論」と呼んでいる。この考えは、相互作用場による寄与が、自由場による寄与と比べて、非常に小さいという仮定の下に成立する。

A.6 Feynman 則

(113) 式から、断面積を実際に求めるまでの式展開は十分に議論され尽くされ、本論文で改めて記述する余地はないので、ここでは、Feinman 則と呼ばれる実際の「粒子」と「場」の相互作用と (113) 式の対応関係を論じる。Feinman 則は、粒子と場の相互作用についてのルールであるので、このルールは \mathcal{L}_{int} および $\phi(x)J(x)$ に関するものである。

以下 Feynman 則である。

- (1) 外場 J および相互作用の頂点を線でつなぐ。それぞれの線を「外線」「内線」とよぶ。
- (2) 内線には対応する伝播関数の因子 $i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ をかける。
- (3) 頂点 (vertex) 因子をかける
- (4) ループ運動量の積分を行う
- (5) feynman 図形の対称性に対応した重み因子をかける。

このルールに応じて計算された feynman 図の一つ一つが (112) 式の行列要素 \mathcal{M} への寄与としてカウントされる。

B 標準模型の歴史と描像

本章では、場の量子論としてどのような枠組みを標準模型が持っているかについて概説する。標準模型は強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用の3つの相互作用について、量子色力学、Weinberg・Salam理論、小林益川理論、を合わせた、 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ gauge 対称性およびその自発的破れについての理論である。複素平面上の回転対称性を持つ群のことを、素粒子分野では gauge 群とよぶ。例えば量子電磁気学 (QED) は、 $U(1)$ 対称性に基づく可換 gauge 理論であり、光子 (photon) が電磁気力を媒介する役割を果たす。このような素粒子間の力を媒介する粒子は gauge boson と呼ばれる。(表 1) また gauge 粒子

Names	Notation	spin	Gauge Symmetry
gluon	g	1	$SU(3)_c$
W boson	$W^\pm \ W^0$	1	$SU(2)_L \times U(1)_Y$
Z boson	Z	1	$SU(2)_L \times U(1)_Y$
photon	A	1	$SU(2)_L \times U(1)_Y$

表 13: 標準模型の gauge boson。

以外の、物質を構成する役割を果たす粒子を fermion とよぶ。このような理論の詳細な解説は多く語られているので、ここでは時間的推移を大きくとって、このような理論的背景がどのように歴史的に成立するに至ったかを述べることにする。これは、3つの力、つまり電磁気力、弱い力、強い力のそれぞれが、どのように一定の枠組みの中で語る事ができるようになったかを述べることである。これはいわば、それぞれの力の「場」を量子化する、「第二量子化」という手続きが、それぞれの場に対していかに可能になったか、またその理論の有効可能な範囲がどのように拡張されていったかを探る事に他ならない。

B.1 電磁気力

このテーマで、最初に意味のある発見がなされたのは、1928年にさかのぼるだろう。これは Paul Dirac によってなされた。「電子」の「相対論的量子力学」の枠組みを彼が「発見」した年で、これがいわゆる「Dirac 方程式」の考案である。また、同年に、Oskar Klein、Pascal Jordan、Eugene Wigner、および Vladimir Fock によって「生成消滅演算子」の概念が形成されている。また Werner Heisenberg、Wolfgang Pauli によって、第二量子化を用いた「場の量子論」の雛形が形成される。彼らの理論は同等であることが確認され、量子電磁気学は 1932年、Enrico Fermi の論文 [31] で最初の定式化がなされた。このなかで語られているのは、光が (光子が) 真空を伝播することにより、Dirac 粒子同士が振幅を「交換」することで、現代流に書いてしまえば、次のような内容である。自由場の Dirac

方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0 \quad (\text{A.129})$$

を導く Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi \quad (\text{A.130})$$

で与えられ、この中の ∂_μ を

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (\text{A.131})$$

と再定義すれば、電子の電磁相互作用は光子の交換として理解できる、というものである。

B.2 発散問題

Enrico Fermi の量子電磁気学 [31] の段階で、光子や電子以外の荷電粒子を含む計算も原理的には可能であると考えられていたが、このような理論形式を用いて実際の物理量を計算すると、摂動展開の最低次においてのみ成功し高次の級数での計算は常に発散することが確認された。「物理量」というものはアприオリに有限である、と考えられるので、無限大の結果が得られた、というのはつまり「理論のどこかがおかしい」わけである。このため、この計算結果の無限大を取り除く「処方」が必要だった。「処方」と呼ばれる所以は、「物理模型が病気にかかっている」という比喩から来ている。この問題は後に「超多時間論」(1943)、相互作用表示 (1947)、経路積分表示 (1948) で独立に相対論的量子力学を完成させていた、朝永振一郎、Julian Schwinger、Richard Feynman によって、「繰り込み」と呼ばれる事になる手法で解決された。繰り込みの概念を一言で述べるなら、先に挙げた局所 gauge 化された Dirac 場、

$$\Psi \sim \Psi e^{i\alpha(x)} \quad (\text{A.132})$$

の波動関数に対し、

$$\Psi_{\text{bare}} = \sqrt{Z_2} \Psi_{\text{renorm}} \quad (\text{A.133})$$

のように「繰り込み定数」と呼ばれる新たなパラメーターを導入し、新たなパラメーターに発散の原因を押しつけるというものである。この際にこのパラメーターが何ら現実的な意味を持たないパラメーターになることを避けるために、「繰り込み条件」というものを課す必要があるが、本研究で用いたその条件については本文で触れた。

B.3 強い力

強い相互作用についての最初の場の理論的理解の枠組みは 1935 年の湯川秀樹によるいわゆる「中間子論」である。これは「湯川モデル」とよばれ、Bohr、Heisenberg 等から強い批判を受けた。しかし中間子が厳然と発見されてしまったことにより、後、認めないものはいなくなった。1964 年、Gell-Mann と Zweig により quark が導入された。その後、quark の束縛状態である hadron のパウリ統計の問題から“新しい”自由度、カラー

が Han、南部、Greenberg により提唱された。一方で、QCD の理論的基礎は 1954 年に発表されていた、Yang と Mills による非可換 gauge 理論である。しかし、この理論は質量ゼロの vector 粒子（つまり、長距離相互作用する粒子）をふくみ、1fm 以下のスケールの現象の記述を目指す理論としては不満足なものだった。さらにこの当時は非可換 gauge 理論の繰り込み可能性は証明されていなかった。そして、南部は chiral 対称性やその自発的破れなどを提唱し、1970 年代に入ると、非可換 gauge 理論の繰り込み可能性や漸近的自由性がようやく証明され、QCD は脚光を浴びるようになる。漸近的自由性により、高エネルギーでは相互作用が弱くなり摂動論による計算が可能となるのに対し、低エネルギーでは相互作用が強くなり摂動論が破綻するため、この理論の基本粒子である quark や gluon が単体で観測できない問題（quark の閉じ込め）に関する解析は困難であったが、1974 年に Kenneth Wilson により提案された格子 gauge 理論を用いた定式化により、強結合領域における計算が原理的に可能となった。その後、コンピュータの発展によりモンテカルロ法による数値シミュレーションが可能となり、quark の閉じ込めの説明や様々なハドロンの質量の計算がなされている。

B.4 quark 模型

quark 模型に至る以前に小林稔の 2 中間子仮説を、わずかばかり修正した、坂田の 2 中間子仮説が出る。その後、多くの素粒子を分類・理論化する試みがなされ（1949 年 2 粒子からなる Yang・Fermi 模型など）、1953 年に Murray Gell-Mann、西島和彦らのストレンジネスの同時発見がなされる。これらを元に、1955 年に坂田昌一が坂田模型を発表し、大貫義郎らが、群論を使い $SU(3)$ モデルを示す。さらに、八道説（日本でも唱えられている）を経て、Murray Gell-Mann、George Zweig、Yuval Ne'eman が 1964 年、独立して quark を示し、当時発見されていたあまりに多くの素粒子の整理が quark の組み合わせで記述できることが理解された。Gell-mann はこの模型の成功でノーベル賞を受賞することになった。

B.5 弱い力

弱い力についての最初の理論は Enrico Fermi による「 β 崩壊」の理論である。当時この現象を理論化する上で問題となっていたのは、現象の前後で、粒子の種類が明らかに変わってしまう、ということで、このような相互作用を理解する枠組みを人類は手にしていなかった。「4点相互作用」という概念を仮定することで Fermi はこれを定式化しようとした。

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} X + \nu + e \quad (\text{A.134})$$

この Fermi の理論には限界があり、実際に neutrino と電子の振る舞いを計算してみると振幅が

$$\sigma(\nu_e e^-) = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (\text{A.135})$$

となったが、これは比較的低エネルギー（数百 GeV）でユニタリー性を破っていた。つまりこの理論は、弱い力を記述するには不十分でありにもナイーブな理論であることが判明した。そこで、電磁気力と結びつけることで成功したのが Weinberg・Salam 理論である。この理論を一言で要約するならば先の 4 点相互作用の中心に何か極端に重い荷電粒子が必要であるということであり、この存在が後に W boson と言われることになる粒子であった。この粒子の存在の理論的な裏付けは「非可換 gauge 理論」というもので、gauge 化を次のように行列 Q を取り込んだ形に拡張するというもので、

$$\Psi \sim \Psi e^{ia(x)Q} \quad (\text{A.136})$$

この仕事を行ったのは Yang・Mills である。これは純粋に理論的な拡張であって、この拡張と前後して、このような行列を取り込んだ gauge 化された場の量子論が、一般的に繰り込み可能であるということを示したことを 't'Hooft が証明している。このような理論的な一連の仕事を現象論的な仕事に応用したのが Weinberg・Salam であり、このような gauge 場に対応した gauge 粒子の質量を予言した。

B.6 対称性の破れと宇宙史

Weinberg・Salam 理論の成功の鍵は対称性が自発的に破れることを超伝導による類推で素粒子論に持ち込んだ南部陽一郎のアイデアであった。この理論の詳しい理論的詳細は常に多くの研究者が語るのだから、ここでは宇宙の歴史と対応して、どの対称性がどういった順序で破れていくのかという時間のスケールで見てみる。

・最初期

宇宙の最初期に関する議論を、客観的に行う手立てを現在の人類は未だ手にしていない。この時期のあまりに微少な空間にあまりに莫大なエネルギーが集中している状態を擬似的に作り出す技術がないからである。一見妥当に見える理論・教義であっても、再現可能な手法で実験的裏付けがとれなければ、「科学的」と言いがたいことは自明であるので、この時期の宇宙の状態の議論をすることは通常控えられる。この慣例に従いここでも、この議論は省略する。

・プランク期 (宇宙誕生から 10^{-43} 秒後まで)

この時期の宇宙の状態も、擬似的に作り出す事が可能でないことには変わりはないのだが、「量子重力理論」が確立すれば、この時期をよく理解できるという「見通し」を人類は持っている。この時期の特徴は電弱相互作用、強い相互作用、重力相互作用が統一されており、一般相対性理論が破綻している、といわれている。この時期に関しても本書の研究テーマを著しく超えるので省略する。

・大統一期 (宇宙誕生から 10^{-36} 秒後まで)

繰り込み群方程式の解としての $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ 対称性に対応した3つの gauge 結合定数が超対称性を仮定した場合のみここで一致するといわれている。ここでは $SU(5)$ というさらに高い対称性が成立していたという憶測も語られている。このことについては後の章で語られる。

・インフレーション期 (宇宙誕生から 10^{-36} から 10^{-32} 秒後まで)

宇宙のインフレーションが生じた温度そして時間についてはよくわかっていない。インフレーションの間宇宙は閉じた宇宙であり、一様・等方に急速に拡大する段階に突入する。光子のエネルギーは quark となるが、それらの粒子はすぐに崩壊する。あるシナリオによれば、宇宙のインフレーションに先立ち宇宙は冷たく空虚となっていた。

・電弱時代 (宇宙誕生から 10^{-36} から 10^{-12} 秒後)

素粒子論分野で、通常「自発的対称性の破れ」と言われる現象が起きたと考えられるのがこの時期である。この時代の宇宙の温度は 1028K と冷たく、強い相互作用と電弱相互作用 (Weinberg・Salam 理論) は分離している。この電弱時代は、インフレーションにより粒子が引き離されたことも、関連していると考えられている。粒子の相互作用は活発であり、Weak boson (W boson と Z boson)、Higgs 粒子といった大量のエキゾチック粒子が生成される。

・再加熱

再加熱時代ではインフレーションの間に生じていた指数関数的な膨張は止まり、インフラトン場の潜在エネルギーは熱く、相対的に quark gluon プラズマな粒子に変換される。大統一理論が正しければ宇宙のインフレーションは大統一理論の破綻の最中あるいは後に生じるか、さもなければ磁気単極子が確認できるはずである。この時代では、宇宙は quark、電子、neutrino が支配し、放射優勢である。

・バリオン生成

この宇宙において、反物質よりバリオンの方が多く理由には不明な部分が多い。

C 超対称 Lagrangian

C.1 最も簡素な超対称模型

この章では超対称的 Lagrangian について記述する。始まりは運動項のみの Wess・Zumino 模型 [32] でゴールが、質量項と相互作用項を持った一般的な超対称 Lagrangian である。始まりの massless の相互作用のない Wess・Zumino 模型は以下のように記述でき、それは前述した single charal supermultiplet に相当する。

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}}), \quad (\text{A.137})$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi, \quad \mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \quad (\text{A.138})$$

ここで scalar と fermion の成分のそれぞれは質量の n 乗の次元を持っており、Lagrangian は、質量の 4 乗の次元を持つ。超対称変換とは scalar boson 場 ϕ を fermion 場 ψ_α に変換することである。

$$\delta\phi = \epsilon\psi, \quad \delta\phi^* = \epsilon^\dagger\psi^\dagger, \quad (\text{A.139})$$

ここで ϵ^α は 2 成分の Weyl fermion である。 ϵ は $[\text{mass}]^{-1/2}$ 次元を持つべきである。 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ という変換であると考えるのが自然であるので、これをもとの Lagrangian に代入すると、この変換における Lagrangian の scalar 部分の変分は以下のように書けることが解る。

$$\delta\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \epsilon\partial^\mu\psi\partial_\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi. \quad (\text{A.140})$$

fermion 場の超対称変換を明らかにするためには、scalar 部分と、fermion 部分とのキャンセルを考えればよい。 $\delta\psi$ は時空間の微分および線形関係の ϵ^\dagger と ϕ を含む必要がある。

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\partial_\mu\phi, \quad \delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi^*. \quad (\text{A.141})$$

これにより次式を得る。

$$\delta\mathcal{L}_{\text{fermion}} = -\epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\psi\partial_\mu\phi^* + \psi^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\epsilon^\dagger\partial_\mu\partial_\nu\phi. \quad (\text{A.142})$$

キャンセルできているかどうかを確認するために、この右辺において偏微分が可換であること ($\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$) および Pauli 行列の公式を用い、(A.142) を部分積分などを用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= -\epsilon\partial^\mu\psi\partial_\mu\phi^* - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi \\ &\quad -\partial_\mu(\epsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi\partial_\nu\phi^* - \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* - \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.143})$$

と書ける。最初の二つの項は $\delta\mathcal{L}_{\text{scalar}}$ に対してちょうどキャンセルする。一方残りの寄与は全微分であるので、作用は不変になる。

$$\delta S = \int d^4x (\delta\mathcal{L}_{\text{scalar}} + \delta\mathcal{L}_{\text{fermion}}) = 0, \quad (\text{A.144})$$

しかしここではまだ、(A.137) が本当に超対称なのかどうか確認できたわけではない。なぜなら、キャンセレーションが確認できただけで、超対称代数が閉じているかどうかを確認できていないからである。これを確認するためにスピノル ϵ_1 および ϵ_2 によってパラメトライズされる超対称変換の交換関係を考えると次のようになる。

$$(\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2}) \phi \equiv \delta_{\epsilon_2}(\delta_{\epsilon_1} \phi) - \delta_{\epsilon_1}(\delta_{\epsilon_2} \phi) = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \partial_\mu \phi. \quad (\text{A.145})$$

Heisenberg 描像の量子力学において、 $i\partial_\mu$ は時空並進の生成子 P_μ に対応する。fermion ψ でも同じ結果にならなければ意味がないことは自明である。

$$(\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2}) \psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon_1^\dagger)_\alpha \epsilon_2 \partial_\mu \psi + i(\sigma^\mu \epsilon_2^\dagger)_\alpha \epsilon_1 \partial_\mu \psi. \quad (\text{A.146})$$

これは Fierz 恒等式によってより理解しやすい形をとることができる。

$$(\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2}) \psi_\alpha = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \partial_\mu \psi_\alpha + i\epsilon_{1\alpha} \epsilon_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - i\epsilon_{2\alpha} \epsilon_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \quad (\text{A.147})$$

しかしながら、これは超対称代数を満たす形にはなっていない。もし運動方程式 $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$ に作用が従うように強制されれば、(A.147) の最後の 2 項は質量殻条件で消える。残るピースは scalar 場と同じ時空変換である。このようにすれば超対称代数と合致する形であることは解るのであるが、超対称代数が質量殻条件を課した場合と課さない場合とで超対称代数を満たすかどうかが決まるということは、超対称性理論が古典運動方程式にのみ適用できる理論であるのかという問いと同じである。量子力学でも成立するようにするために、補助場という概念を導入する必要がある。Lagrangian は変換されるときに変分されるわけであるから、「補助場」は当然オイラーラグランジュ方程式の解をもつような場である必要があるとともに、運動項を持たないような場のことを通常指す。ここでは次の複素 scalar 場 F が boson の自由度と fermion の自由度を合わせるために導入されるのであるが、

$$\mathcal{L}_{\text{auxiliary}} = F^* F. \quad (\text{A.148})$$

と書くことができる。 F の次元は $[\text{mass}]^2$ であり、通常の $[\text{mass}]$ 次元の scalar 場とは似ていない。この場を超対称変換した時に、(A.147) の余計な項を消せる仕組みを持たせるのである。そのための変換「 F 変換」は

$$\delta F = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad \delta F^* = i\partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \epsilon. \quad (\text{A.149})$$

でしかあり得なく、Lagrangian 密度の補助部分の変分は、

$$\delta \mathcal{L}_{\text{auxiliary}} = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi F^* + i\partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \epsilon F, \quad (\text{A.150})$$

であり、これらは質量殻条件により消えるが任意の off shell 場の場合には消えない。 ψ および ψ^\dagger の変換則に余剰項を付け加えることにより、

$$\delta \psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi + \epsilon_\alpha F, \quad \delta \psi_\alpha^\dagger = i(\epsilon \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu \phi^* + \epsilon_\alpha^\dagger F^*, \quad (\text{A.151})$$

表 14: Counting of real degrees of freedom in the Wess-Zumino model. (F を導入することで on-shell でも off-shell でも scalar と fermion の自由度を合わせられることを示す。)

	ϕ	ψ	F
on-shell ($n_B = n_F = 2$)	2	2	0
off-shell ($n_B = n_F = 4$)	2	4	2

という $\delta\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ への付加的な寄与を得る。これは $\delta\mathcal{L}_{\text{auxiliary}}$ と全微分項を除いてキャンセルする。そこで我々の $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{auxiliary}}$ であらわされる、いわゆる「修正された」理論は未だ超対称変換に対して不変である。このような手続きの結果、それぞれ $X = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$ 場を用いて等式 (A.139), (A.149)、および (A.151) を使うことにより

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2})X = i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu X \quad (\text{A.152})$$

が得られる。ここまでで示せたことは、要約すれば次の2つである。

- 1, この変換が Lagrangian の形を変えない。
- 2, この変換が off-shell の場合でも成立する。

補助場を使った定式化は自発的超対称性の破れを論じるのにも役立つ。これは後の章で論じられる。作用の超対称変換の元での不変性は保存流 supercurrent つまり反交換 4 元 vector J_α^μ の存在を意味する。fermionic 生成子を伴った対称性にふさわしく、それはスピノルの足を運ぶ。通常のスケーラーの定理を使えば、supercurrent とそのエルミート共役は場 $X = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$ の変分の中で見つける事ができる。

$$\epsilon J^\mu + \epsilon^\dagger J^{\dagger\mu} \equiv \sum_X \delta X \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu X)} - K^\mu, \quad (\text{A.153})$$

このカレントの DIV (素粒子論分野の「発散」ではなく、「ベクトル解析」の分野での発散なのでこう書く事にする) を計算することで保存流を探すのだが、ここで K^μ の DIV は超対称変換の下での、Lagrangian 密度の変分として書けることが解る。このカレントの変分は $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ で表される。 K^μ がユニークではないことに注意したい。 $\partial_\mu k^\mu = 0$ を満たすどんな vector でも、 K^μ は $K^\mu + k^\mu$ と取り替えることができる。少しの手続きでこのことは明らかになる。

$$J_\alpha^\mu = (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi)_\alpha \partial_\nu\phi^*, \quad J_\alpha^{\dagger\mu} = (\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)_\alpha \partial_\nu\phi. \quad (\text{A.154})$$

supercurrent とそのエルミート共役は別々に保存される。

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0, \quad \partial_\mu J_\alpha^{\dagger\mu} = 0, \quad (\text{A.155})$$

運動方程式を使うことによって明らかになったように、これらのカレントから、チャージの保存を作ることができる。

$$Q_\alpha = \sqrt{2} \int d^3\vec{x} J_\alpha^0, \quad Q_\alpha^\dagger = \sqrt{2} \int d^3\vec{x} J_\alpha^{\dagger 0}, \quad (\text{A.156})$$

それは、超対称変換の生成子である。因子 $\sqrt{2}$ による規格化は歴史的な理由により、任意の慣例を含む。量子力学的な演算子としては

$$[\epsilon Q + \epsilon^\dagger Q^\dagger, X] = -i\sqrt{2} \delta X \quad (\text{A.157})$$

と書け、どのような場 X に対しても on shell で消える場合を除いては成立する。これは正純時間の交換または反交換関係を使うことにより明らかに検証可能である。

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = [\phi^*(\vec{x}), \pi^*(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.158})$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\alpha^\dagger(\vec{y})\} = (\sigma^0)_{\alpha\dot{\alpha}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.159})$$

それは自由場理論の Lagrangian eq. (A.137) からくる。ここで $\pi = \partial_0\phi^*$ and $\pi^* = \partial_0\phi$ はそれぞれ ϕ and ϕ^* の共役運動量である。eq. (A.157) を使うことにより、eq. (A.152) の内容は、正順交換関係としてあらわされる。

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, [\epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger, X] \right] - \left[\epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger, [\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, X] \right] = \\ & \qquad \qquad \qquad 2(\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger - \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) i\partial_\mu X, \quad (\text{A.160}) \end{aligned}$$

時空間の運動量演算子は $P^\mu = (H, \vec{P})$ であり、 H はハミルトニアン \vec{P} は 3 元運動量演算子であり、

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\pi^* \pi + (\vec{\nabla}\phi^*) \cdot (\vec{\nabla}\phi) + i\psi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\psi \right], \quad (\text{A.161})$$

$$\vec{P} = - \int d^3\vec{x} \left(\pi \vec{\nabla}\phi + \pi^* \vec{\nabla}\phi^* + i\psi^\dagger \vec{\sigma}^0 \vec{\nabla}\psi \right). \quad (\text{A.162})$$

で与えられる。そこから次の時空変換が示せる。

$$[P^\mu, X] = -i\partial^\mu X. \quad (\text{A.163})$$

これを用いて、(A.160) は次のように書き直すことができる。どのような X についても、on shell で消える項を除いては次のようであるべきである。

$$\left[[\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, \epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger], X \right] = 2(-\epsilon_1 \sigma_\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma_\mu \epsilon_1^\dagger) [P^\mu, X], \quad (\text{A.164})$$

よって次が言える。

$$[\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, \epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger] = 2(-\epsilon_1 \sigma_\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma_\mu \epsilon_1^\dagger) P^\mu. \quad (\text{A.165})$$

eq. (A.165) を展開して、超対称代数の正確な表現を得る。

$$\{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \quad (\text{A.166})$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\} = 0, \quad (\text{A.167})$$

反交換子に変化したのは、反交換スピノル ϵ_1 および ϵ_2 を取り除いたからである。結果的に、

$$[Q_\alpha, P^\mu] = 0, \quad [Q_\alpha^\dagger, P^\mu] = 0 \quad (\text{A.168})$$

となる。これは超対称変換がグローバルであるという事実からくる。この超対称代数の正準生成子 Q および Q^\dagger の例はハミルトニアン運動方程式の使用を要求する。しかしながら、対称性自体はすでに示したように、Lagrangian level で off shell でも成り立つ。

C.2 chiral supermultiplet の相互作用

前 subsection では scalar, fermion がそれぞれ 1 つずつの場合の議論をしたのだが、この章では、超対称性理論に相互作用を入れる場合の一般的な考え方を議論する。MSSM のような現実的な理論において gauge もしくは non-gauge 相互作用の両方を伴った、多くの chiral supermultiplet が存在する。MSSM ではそれらは、quarks, squarks, leptons, sleptons, Higgs 粒子 scalar 粒子 および Higgsino fermion である。我々はこちらで、質量項を含む non-gauge カップリングの形は、作用が超対称変換の下で不変という要請によって非常に制限されることを発見する。

我々の出発点は足 i によってラベルされる、自由 chiral supermultiplet である。我々は相互作用を含む超対称理論を建設したいのであるから、それぞれの supermultiplet は物理的自由度としての、複素 scalar 場 ϕ_i と左巻ワイル fermion ψ_i と伝播のない複素補助場 F_i を含む。前 subsection は Lagrangian の自由部分は以下である、と述べている。

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \quad (\text{A.169})$$

ここで i は場 ϕ_i および ψ_i は常に足を記載し、そのエルミート共役は常に上部に足を記載するという慣例で書き表すことにする。この自由場の Lagrangian は超対称変換の下で不変であり、

$$\delta\phi_i = \epsilon\psi_i, \quad \delta\phi^{*i} = \epsilon^\dagger\psi^{\dagger i}, \quad (\text{A.170})$$

$$\delta(\psi_i)_\alpha = -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i, \quad \delta(\psi^{\dagger i})_{\dot{\alpha}} = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^{*i} + \epsilon_{\dot{\alpha}}^\dagger F^{*i}, \quad (\text{A.171})$$

$$\delta F_i = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i, \quad \delta F^{*i} = i\partial_\mu \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \epsilon. \quad (\text{A.172})$$

である。我々は今、超対称性と矛盾しない最も一般的な繰り込み可能な理論を手にしたいのである。しかもこの理論が「補助場」が消える前、つまり off-shell でも成り立つように

したいのである。これを始めるにあたり繰り込み可能性のために、それぞれの項が $[\text{mass}] \leq 4$ を持つべきである。唯一の候補は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + x^{ij} F_i F_j \right) + \text{c.c.} - U, \quad (\text{A.173})$$

である。(正確を記せば、Lagrangian の次元を $[\text{mass}] = 4$ とすることが最初の前提で、fermion 場の次元が $= 3/2$ であることを出発点に考えることが最も簡単であるから、このような表記になるのであるが。) いま、scalar と fermion の次元は解っているので、次元を合わせるためだけに次元がそれぞれ 1, 2, 0, および 4 である W^{ij} , W^i , x^{ij} , および U という ϕ に関する「多項式」(つまり次元を合わせる役割をすればどんな呼ばれ方でもできるもの) を理論に導入してしまう。次に我々は、 \mathcal{L}_{int} が超対称変換の下で不変であることを要求する。なぜなら $\mathcal{L}_{\text{free}}$ はすでにそれ自体、不変であるからである。これはすなわち候補項 $U(\phi_i, \phi^{*i})$ が消えなければならないことを意味する。もしそのような項が存在するならば、超対称変換 (A.170) は $\epsilon \psi_i$ もしくは $\epsilon^\dagger \psi^{\dagger i}$ を掛けることによって時空間微分 F_i , F^{*i} 場なしに、別の scalar 場の関数へと変換される。それは (A.170)-(A.173) から明らかである。同様に無次元のカップリング x^{ij} は 0 でなければならない。なぜなら超対称変換が他の項によってキャンセルすることが不可能だからである。そこで唯一の可能性は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i \right) + \text{c.c.} \quad (\text{A.174})$$

である。これは Lagrangian の変分を考えればすぐに解る。この点において W^{ij} および W^i はお互いに関係がない。しかしながら、同じ文字を選んだの事に意味がないわけではない。 W の正体を知るためには \mathcal{L}_{int} をいくつかの部分に分割するのが最も簡単である。最初に 4 元スピノルを含む部分を考える。

$$\delta \mathcal{L}_{\text{int}}|_{4\text{-spinor}} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi_k} (\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) - \frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi^{*k}} (\epsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j) \right] + \text{c.c.} \quad (\text{A.175})$$

$(\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j)$ に比例する項は他の項に対してキャンセルできない。しかしながら幸運にも Fierz 恒等式が次を示す。

$$(\epsilon \psi_i) (\psi_j \psi_k) + (\epsilon \psi_j) (\psi_k \psi_i) + (\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) = 0, \quad (\text{A.176})$$

故にこの $\delta \mathcal{L}_{\text{int}}$ への寄与は $\delta W^{ij} / \delta \phi_k$ が i, j, k の下でのトータルで対称な場合のみ消える。 $(\epsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j)$ に比例する項を利用可能なそのような恒等式はない。そのような項はお互いにキャンセルできないから、それは存在できないことを要求し、 W^{ij} が ϕ^{*k} を含むことができないことを我々に教えるのみである。言い換えれば、 W^{ij} は複素場 ϕ_k の中で正則である。これまでのところ我々が学んだことをまとめれば、

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk} \phi_k \quad (\text{A.177})$$

と書く事ができる。ここで M^{ij} は fermion 場の対称な質量行列であり、 y^{ijk} は ϕ_k と二つの fermion $\psi_i \psi_j$ との間の i, j, k の変換の下で対称である湯川カップリングである。ゆえに

便宜的に次のように書くことができ、

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta\phi_i\delta\phi_j}W \quad (\text{A.178})$$

ここで我々は役に立つ次を得る。

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k, \quad (\text{A.179})$$

これを superpotential と呼ぶ。これは通常の意味の scalar ポテンシャルではなく現実的な意味を持たない。scalar 場 ϕ_1 の正則関数の代わりである。次に、 $\delta\mathcal{L}_{\text{int}}$ の時空間微分を含む部分について考える。

$$\delta\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\partial} = (iW^{ij}\partial_\mu\phi_j\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger + iW^i\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger) + \text{c.c.} \quad (\text{A.180})$$

ここで、次の eq. (A.178) を使えば、

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right). \quad (\text{A.181})$$

は全微分になる。それゆえに、もし

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i} = M^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k, \quad (\text{A.182})$$

の時、eq. (A.180) は全微分となり、残りの $\delta\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中の項はすべて F_i もしくは F^{*i} の中で線形であり、すでに発見したように、 W^i および W^{ij} を考えたときにキャンセルする。

実際に superpotential の中の線形項を含めることができ、

$$W = L^i\phi_i + \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \quad (\text{A.183})$$

と書ける。ここで L^i は $[\text{mass}]^2$ 次元のパラメーターであり、Lagrangian の scalar ポテンシャルにのみ影響する。そのような線形項は ϕ_i が gauge singlet の場合のみ許され、MSSM にはそのような gauge singlet な chiral supermultiplet はない。しかしながらこのタイプの項は超対称性の自発的破れの議論で、重要な役割を果たす。振り返れば我々は chiral supermultiplets へのもっとも一般的な non-gauge 相互作用は、複素スカラー場の正則関数によって決定されることを発見した。これを superpotential と呼んだ。補助場 F^{*i} は、古典運動方程式を使うことにより除去できた。 $\mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ の補助場を含む部分は、 $F_i F^{*i} + W^i F_i + W_i^* F^{*i}$ であり、次の運動方程式

$$F_i = -W_i^*, \quad F^{*i} = -W^i. \quad (\text{A.184})$$

を導く。このようにして補助場は scalar 場の中で代数的に表現される。我々は次の Lagrangian 密度を得る。

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i + i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}(W^{ij}\psi_i\psi_j + W_{ij}^*\psi^{\dagger i}\psi^{\dagger j}) - W^i W_i^*. \quad (\text{A.185})$$

今、伝播しない場 F_i, F^{*i} は除去された。これは理論の scalar ポテンシャルが「superpotential」の中で次のように与えられる事の当然の結果である。

$$V(\phi, \phi^*) = W^k W_k^* = F^{*k} F_k = M_{ik}^* M^{kj} \phi^{*i} \phi_j + \frac{1}{2} M^{in} y_{jkn}^* \phi_i \phi^{*j} \phi^{*k} + \frac{1}{2} M_{in}^* y^{jkn} \phi^{*i} \phi_j \phi_k + \frac{1}{4} y^{ijn} y_{klm}^* \phi_i \phi_j \phi^{*k} \phi^{*l}. \quad (\text{A.186})$$

それが絶対値の 2 乗の和であることから、この scalar ポテンシャルは自動的に制限され、常に負ではない。もし superpotential の一般形を super potential eq. (A.179) を eq. (A.185) の代わりにするなら、全 Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - V(\phi, \phi^*) + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} M^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} M_{ij}^* \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \\ & - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^{*i} \psi^{\dagger j} \psi^{\dagger k}. \end{aligned} \quad (\text{A.187})$$

を得る。今、我々は、fermion と scalar の質量を線形化された運動方程式を見つめることによって比べることができる。

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi_i = -M_{ik}^* M^{kj} \phi_j + \dots, \quad (\text{A.188})$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i = M_{ij}^* \psi^{\dagger j} + \dots, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi^{\dagger i} = M^{ij} \psi_j + \dots \quad (\text{A.189})$$

ψ^{\dagger} の項の中の ψ は除去することができ、また逆もまた真であり、eq. (A.189) の中で、

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi_i = -M_{ik}^* M^{kj} \psi_j + \dots, \quad \partial^\mu \partial_\mu \psi^{\dagger j} = -\psi^{\dagger i} M_{ik}^* M^{kj} + \dots \quad (\text{A.190})$$

を得る。このようにして fermion と boson は実数の固有値を持つ 2 乗質量行列を伴った、同じ波動関数を満足する。すなわち、 $(M^2)_i^j = M_{ik}^* M^{kj}$ である。つまり、ユニタリ行列を伴った場の再定義によるこの行列の質量の対角化は chiral supermultiplets の補正を与え、そのそれぞれは、質量の縮退した複素 scalar と Weyl fermion を含むということになるのである。

C.3 gauge supermultiplet の Lagrangian

gauge supermultiplet の伝播自由度は質量のない gauge boson 場 A_μ^a と、2 成分の weyl fermion gaugino λ^a である。足 a は gauge 群 ($a = 1, \dots, 8$ for $SU(3)_C$ のを表し、 $a = 1, 2, 3$ は $SU(2)_L$ 弱アイソスピン; $a = 1$ は $U(1)_Y$ 弱ハイパーチャージを表す。vector supermultiplet 場の gauge 変換は

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c, \quad (\text{A.191})$$

$$\lambda^a \rightarrow \lambda^a + g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c, \quad (\text{A.192})$$

	A_μ	λ	D
on-shell ($n_B = n_F = 2$)	2	2	0
off-shell ($n_B = n_F = 4$)	3	4	1

表 15: Counting of real degrees of freedom for each gauge supermultiplet.

であり、ここで、 Λ^a は無限小 gauge 変換パラメーター、 g は gauge カップリング f^{abc} は反対称構造定数を表しそれは gauge 群を定義する。gaugino に対応するものはこの場合 gauge 1 重項である。慣例では QED では

$$A^\mu = (V, \vec{A}) \text{ である}$$

ここで V および \vec{A} は通常の電磁ポテンシャルおよび vector ポテンシャルで、次で与えられる電場と磁場を伴いそれは $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_0\vec{A}$ and $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. で与えられる。 A_μ^a および λ_α^a の on-shell 自由度は超対称性の要求に応じ、二つの bosonic もしくは fermionic なヘリシティの状態で見積もられる。しかしながら off-shell の λ_α^a は 2 つの複素数もしくは 4 つの実数の fermionic な自由度で構成される一方で、 A_μ^a は 3 つの実数の bosonic な自由度のみを持つ。そのうちの一つの自由度は不均質な gauge 変換によって取り除かれる

故に、我々には一つの実数の bosonic な補助場が必要である。伝統的に、それは D^a 、と呼ばれ、超対称性が off shell で矛盾しないために必要である。この場は eq. (A.192) のような gauge 群と D^a によって取り換えられた、 λ^a との接続としても変換し、 $(D^a)^* = D^a$ を満たす。また chiral 補助場 F_i のように、gauge 補助場 D^a は $[\text{mass}]^2$ 次元を持ち、運動項は持たない。それゆえに、代数的な運動方程式を使うことにより、on shell では除去される。自由度のカウントは以下の表に要約される。それゆえに gauge supermultiplet の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\lambda^{\dagger a}\bar{\sigma}^\mu\nabla_\mu\lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a, \quad (\text{A.193})$$

ここで

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{A.194})$$

は、通常の Yang-Mills 場の強度であり、

$$\nabla_\mu\lambda^a = \partial_\mu\lambda^a - gf^{abc}A_\mu^b\lambda^c \quad (\text{A.195})$$

であるべきであり、gaugino 場の共偏微分である。eq. (A.193) が本当に超対称的かどうかのチェックのためには、超対称的な場の変換を特殊化すべきであり、その形は $[\text{mass}]^{-1/2}$ 次元を持つ無限小パラメーター $\epsilon, \epsilon^\dagger$ の中で、それらが線形でなくてはならず、また δA_μ^a が実数であり δD^a は実数でなければならず gaugino の場の方程式に比例しなくてはならないという要請から得られる。これは chiral supermultiplet の補助場 F の役割からも類推されるだろう。このようにして、因子は非-Abelian gauge 対称性に対し非線形であることが

推測できる。なぜなら、gauge 場は gaugino 場として振る舞う共偏微分の中、および場の強度 $F_{\mu\nu}^a$ の中にあるからである。 D^a , 以外にさらに補助的な場を追加することによって、場の中で線形な超対称変換を作ることができる。これが \mathfrak{S} superfield を実行するのに最も簡単な方法である。この章での余計な補助場が除去されているバージョンが「Wess-Zumino と呼ばれる、

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}_\mu \epsilon), \quad (\text{A.196})$$

$$\delta \lambda_\alpha^a = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a, \quad (\text{A.197})$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} (-\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \nabla_\mu \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu \epsilon). \quad (\text{A.198})$$

を得る。 $\sqrt{2}$ は $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ の積分を不変にするように選ばれている。また、 λ^a は MSSM の扱いに都合よく選ばれている。

次の式もチェックしておこう。

$$(\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2}) X = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \nabla_\mu X \quad (\text{A.199})$$

C.4 超対称的な gauge 相互作用

今、超対称性理論一般の Lagrangian 密度を議論する準備ができた。つまり、gauge、chiral 両方の supermultiplets についてである。それはエルミート行列 $(T^a)_i^j$ が $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ を満足する表現の中での、gauge 群の下での、chiral supermultiplets 変換である。その時、 $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ であり、基本表現の中の chiral supermultiplet 変換に対して、 T^a が $1/2$ 回 Pauli 行列に掛け合わされる。

なぜなら、超対称性および gauge 変換は scalar と fermion を交換し、補助場は gauge 群の表現のなかで同じでなければならないからである。ゆえに $X_i = \phi_i, \psi_i, F_i$ に対して、

$$X_i \rightarrow X_i + ig \Lambda^a (T^a X)_i \quad (\text{A.200})$$

であり、Lagrangian が gauge 不変性を持つために、通常の微分 $\partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \phi^{*i}$, と $\partial_\mu \psi_i$ を eq. (A.169) の中で共偏微分と取り替える必要があり、それは

$$\nabla_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + ig A_\mu^a (T^a \phi)_i \quad (\text{A.201})$$

$$\nabla_\mu \phi^{*i} = \partial_\mu \phi^{*i} - ig A_\mu^a (\phi^{*i} T^a) \quad (\text{A.202})$$

$$\nabla_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i + ig A_\mu^a (T^a \psi)_i. \quad (\text{A.203})$$

である。素朴には、これはシンプルに gauge supermultiplet の中での、vector boson のカップリングが、chiral supermultiplets の中の scalar および fermion であるという、ゴールを

達成している。しかしながら、我々は gauge 不変性および、gaugino と D^a によって、許される、すべての他の、相互作用があるかどうかを考える必要がある。そしてそれらは、超対称 Lagrangian を構成する要素として含まれるべきである。 A_μ^a は ϕ_i および ψ_i と結合し、また同様に、 λ^a と D^a が理にかなっているからである。

事実3つのそのような可能な繰り込み可能な相互作用 (質量次元 ≤ 4 の場の) が存在し、それはすなわち、

$$(\phi^* T^a \psi) \lambda^a, \quad \lambda^{\dagger a} (\psi^\dagger T^a \phi), \quad \text{and} \quad (\phi^* T^a \phi) D^a. \quad (\text{A.204})$$

である。今、知られていない無次元の結合係数をそれらに加えることができる。

$$\delta \phi_i = \epsilon \psi_i \quad (\text{A.205})$$

$$\delta \psi_{i\alpha} = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \nabla_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i \quad (\text{A.206})$$

$$\delta F_i = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \psi_i + \sqrt{2}g(T^a \phi)_i \epsilon^\dagger \lambda^{\dagger a}. \quad (\text{A.207})$$

いくつかの代数的な処理をすれば、係数を固定することができ、繰り込み可能な超対称理論は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{chiral}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \\ & -\sqrt{2}g(\phi^* T^a \psi) \lambda^a - \sqrt{2}g\lambda^{\dagger a} (\psi^\dagger T^a \phi) + g(\phi^* T^a \phi) D^a. \end{aligned} \quad (\text{A.208})$$

と表せる。

eq. (A.208) が不変であることを証明するためには、次の恒等式を使う。

$$W^i (T^a \phi)_i = 0. \quad (\text{A.209})$$

これは superpotential, および $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ が gauge 不変であるための満足させられるべき条件である。eq. (A.208) の2行目は超対称性の要請により gauge 結合定数が固定される相互作用と矛盾しない。これらは通常の場合の理論の観点からの gauge 相互作用ではない。最初の2つの項は gaugino と物質場の直接結合である。これはいわば「超対称化」と呼べるだろう。最後の項は $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ のなかで $D^a D^a / 2$ 項をつなぎ、次の運動方程式

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi). \quad (\text{A.210})$$

を供給する。このように補助場 F_i および F^{*i} と同じように D^a は scalar 場の中の項として純粋に代数的に表現することができる。

$$V(\phi, \phi^*) = F^{*i} F_i + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a = W_i^* W^i + \frac{1}{2} \sum_a g_a^2 (\phi^* T^a \phi)^2. \quad (\text{A.211})$$

この表現の中で、2つのタイプの項は「 F -term」と「 D -term」と呼ばれる。我々は明に合計 \sum を gauge 群がいくつかの異なる gauge カップリング g_a を伴ったいくつかの区別できる因子をカバーするように書くことができる。 $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ and $U(1)_Y$ は異なった

gauge 結合 g_3, g and g' を持つ。なぜなら、 $V(\phi, \phi^*)$ 2 乗の和だからである。これは、どんな場の設定でも 0 より大きい、または等しい。これは超対称性理論の、ユニークかつ、興味深い側面である。scalar ポテンシャルは、理論の中の「他の」相互作用によって、完全に決定される。 F -terms は Yukawa カップリングと fermion の質量項によって、 D -terms は gauge 相互作用によって固定される。ネーターの定理を使うことにより、supercurrent の保存を見つけることができる。

$$J_\alpha^\mu = (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi_i)_\alpha \nabla_\nu \phi^{*i} + i(\sigma^\mu \psi^\dagger i)_\alpha W_i^* + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\mu \lambda^\dagger a)_\alpha F_{\nu\rho}^a + \frac{i}{\sqrt{2}} g_a \phi^* T^a \phi (\sigma^\mu \lambda^\dagger a)_\alpha, \quad (\text{A.212})$$

Wess-Zumino 模型 eq. (A.154) の中で与えられた表現に現れているように、この結果は我々が超対称性の破れを議論するのに役立つ。

C.5 超対称性の破れ

本研究では超対称模型を仮定するので、この自発的破れについても、超対称的代数と関係づけて考察してみることにする。超対称模型において超対称性と gauge 対称性が同時または別々に自発的に破れるという関係はどう表現されるかである。超対称代数の基本的な性質、

$$H = 1/4(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2) \quad (\text{A.213})$$

は、全ての状態 $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq 0$ である事を示す。 $\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$ が $|Q|0\rangle = |\bar{Q}|0\rangle$ を意味するから、これは期待値を持たない真空を意味する (a)。つまり超対称性が保たれていることを意味する。一方で、この値が正の場合、自発的に超対称性は破れる (b)。まず最初に O'Raifeartaigh 模型というものについてみてみよう。この模型で

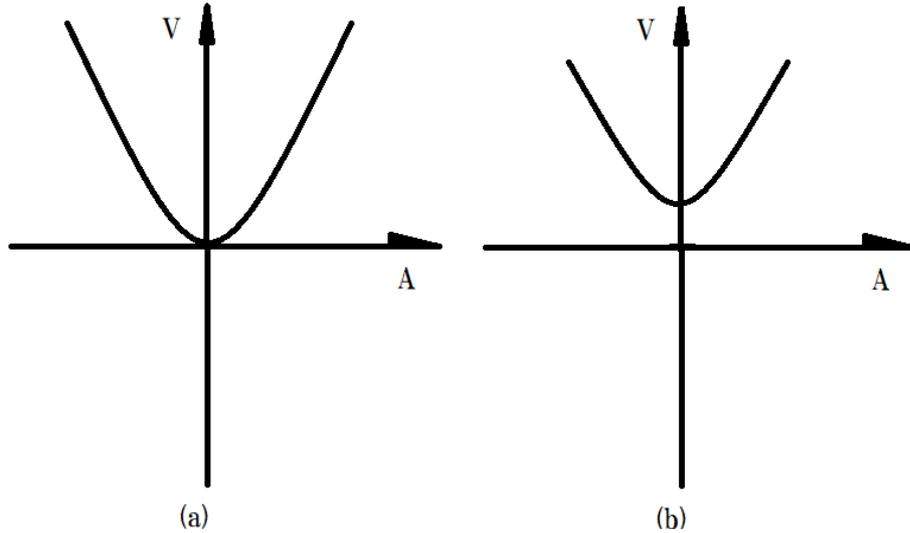


図 31: (a) の基底状態は超対称性を保つ。(b) の基底状態は超対称性を自発的に破る。

は基底状態がシンプルに超対称性のみを破る。この模型ではポテンシャルエネルギーは $\mathcal{V} = F_k^* F_k$ となり、 F_k^* は次式で与えられる。

$$F^* = -(\lambda_k + m_{ik}A_i + g_{ijk}A_iA_j). \quad (\text{A.214})$$

$F_k = 0$ に対する A_i の真空期待値 a_i がポテンシャルの最小シグナルである。超対称性を破るには、

$$0 = -(\lambda_k + m_{ik}a_i + g_{ijk}a_i a_j). \quad (\text{A.215})$$

が a_i に対して解を持たないように、 $\lambda_k, m_{ik}, g_{ijk}$ を意図的に選ばなければならない。この模型では3つの chiral 超場を導入する事で、超対称性を破る事ができることが発見された。この模型の最も簡素な表現は以下である。

$$\mathcal{L}_{P.E.} = \{[\lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_1] + h.c.\} \quad (\text{A.216})$$

Fayet と Iliopoulos は非可換 gauge 理論において、超対称性が自発的に破れる Lagrangian を発見した。彼らは vector 超場の $\theta\theta\bar{\theta}$ 成分が超対称不変かつ gauge 不変である事に気づいた。彼らはこの項を QED の Lagrangian(付録)に加えると、超対称性が自発的に破れる事に気づいた。

$$\mathcal{L} = 1/4(W^\alpha W_\alpha + \bar{W}_\alpha \bar{W}^\alpha + \Phi_1^+ e^{eV} \Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-eV} \Phi_2 + m(\Phi_1\Phi_2 + \Phi_1^+\Phi_2^+) + 2\kappa V) \quad (\text{A.217})$$

この模型ではポテンシャルは

$$\mathcal{V} = 1/2D^2 + F_1F_1^* + F_2F_2^* \quad (\text{A.218})$$

で与えられ、D,F はオイラー方程式

$$D + \kappa + e/2(A^*A_1 - A^*A_2) = 0 \quad (\text{A.219})$$

$$F_1 + mA_2^* = 0 \quad (\text{A.220})$$

$$F_2 + mA_1^* = 0 \quad (\text{A.221})$$

の解である。よって超対称性は自発的に破れている。ポテンシャルをより詳しく見れば、

$$\mathcal{V} = 1/2\kappa^2 + (m^2 + 1/2e\kappa)A_1^*A_1 + (m^2 - 1/2e\kappa)A_2^*A_2 + 1/8e^2(A^*A_1 - A^*A_2)^2 \quad (\text{A.222})$$

となっているので、 m^2 が $e\kappa/2$ より大きい場合と小さい場合の二つを区別する必要がある。 $m^2 > e\kappa/2$ のときは A_1, A_2 はともに実数の質量をもつ。模型は一方が質量 $m_1^2 = m^2 + e\kappa/2$ 他方が $m_2^2 = m^2 - e\kappa/2$ である二つの複素数の scalar 場三つのスピノル場、一つの vector 場を記述している。スピノル場と、vector 場の質量は対称性の破れでは変化しない。vector 場は破れていない $U(1)$ 対称性の gauge 場の役割をし、 λ は自発的に破れた超対称性から生じる Goldstone fermion である。 λ の変換則から、

$$\delta_\epsilon \lambda = i\epsilon D + \sigma^{mn} \epsilon v_{mn} \quad (\text{A.223})$$

D が真空期待値を持てば λ は非斉次に変換することが解る。

$$\delta_\epsilon \lambda = -i\epsilon\kappa + \quad (\text{A.224})$$

これが λ を Goldstone fermion と同定する。補助場のノンゼロ真空期待値が超対称性の自発的破れを誘起する。 $m^2 < e\kappa/2$ のときには、 $A_1 = A_2 = 0$ はポテンシャルを最小にしない。最小を見つけるには次の方程式を解かなければならない。

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_1^*} = (m^2 + 1/2e\kappa)A_1 + e^2/4(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)A_1 = 0 \quad (\text{A.225})$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_2^*} = (m^2 + 1/2e\kappa)A_2 + e^2/4(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)A_2 = 0 \quad (\text{A.226})$$

これは $A_1 = 0, A_2 = v, e^2v^2/4 + (m^2 - e\kappa/2) = 0$ に最小値を与える。gauge 変換で v は実数に選べる。ポテンシャルをその最小値まわりで展開すると $U(1)$ 対称性が自発的に破れる。ただしこのように超対称性が自発的に破れる模型では、数 100GeV 程度の超対称粒子が予言されてしまい、現在そのような粒子は見つかっていない。このため、我々は 1TeV よりも重い領域に超対称粒子を仮定できる、「soft breaking」を仮定した模型である、MSSM を選んでいる。

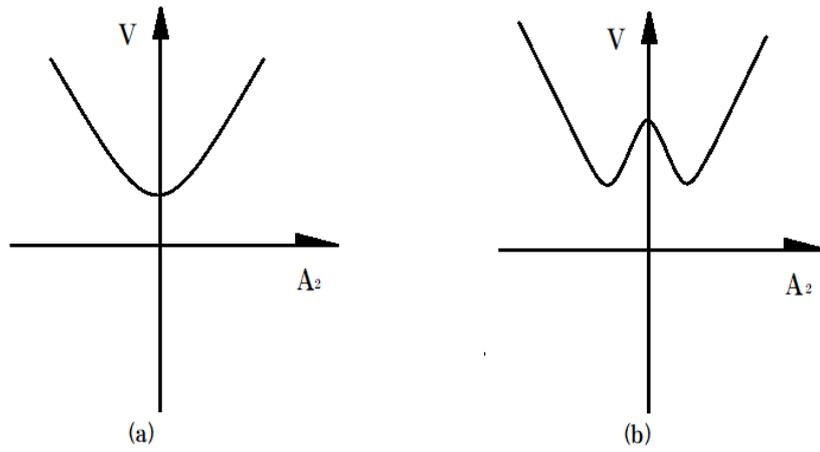


図 32: (a) $m^2 > e\kappa/2$ のとき超対称性のみが破れる (b) $m < e\kappa/2$ のとき、gauge 対称性と超対称性の両方が破れる。

D 暗黒物質のMSSMにおける熱平衡

現在推定される量のダークマターが残存するためには、MSSMの中の暗黒物質の候補である粒子が共消滅という現象を起こした、と考える必要がある。この考えに従うと、MSSM粒子の中で、暗黒物質の候補と対をなして消滅する粒子の質量は制限されることになる。表式を用いて暗黒物質の生成について説明しよう。「標準宇宙論」は以下の作用を出発点とする。

$$S = \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} d^4x \left[-\frac{R}{16\pi G} - \Lambda + \mathcal{L}_{\text{SM}} \right] \quad (\text{A.227})$$

ここで $g_{\mu\nu}$ は計量であり、 R はリッチ・スカラー、 G は重力定数、 Λ は宇宙項である。この作用を計量 $g_{\mu\nu}$ で変分することにより

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{tot}} - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) + P_{\text{tot}} \frac{d}{dt} a^3 = 0 \quad (\text{A.228})$$

という2つの表式が得られる。第1式はフリードマン方程式と呼ばれ、空間の膨張を表す。定数 $H = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ は Hubble 定数と呼ばれる。宇宙がこれによって表されるモデルを「一様等方宇宙モデル」と呼ぶ。 $k < 0$ で宇宙は永遠に膨張を続け、 $k > 0$ でやがて収縮に転じるという、我々の宇宙に関する描像が得られる。 a は宇宙の大きさを表すスケール因子、 ρ は密度パラメーターと呼ばれる。1929年の Hubble による宇宙観測以来、様々な宇宙論の議論がされてきたが、その中で最も重要な定数は次の

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2} \quad (\text{A.229})$$

であり、これを「宇宙論パラメーター」と呼ぶ。一方標準宇宙論の作用を物質場で変分することにより、物質場の運動方程式が得られる。得られた方程式から、Boltzmann 方程式を得る [33]。このフリードマン方程式と、Boltzmann 方程式から「宇宙の熱史」とも言える様々な宇宙の熱力学的なシナリオが語られることが多いが、この二つの方程式の最も重要な結論は、宇宙の物質の状態は相互作用を通して熱浴を維持しようとする過程と、宇宙の膨張を通して熱浴から離反しようとする過程の均衡で決まるということである。この熱浴を維持しようとする反応率は、その過程の断面積を σ とするとき、

$$\Gamma = n\sigma v \quad (\text{A.230})$$

と表される。ここで n は反応に関わる数密度、 v は粒子間の相対速度である。熱浴から離反しようとする割合は Hubble パラメーター H で決まる。ここで解くことは、宇宙初期においては重力定数 G によって H が抑制されているため、熱浴から離反しようとする動きが抑制されており、宇宙は熱平衡に近い状態にある、ということである。

さて、このような熱史では宇宙に存在する全物質の総量を説明できないことが明らかとなっている。さらに、天体観測では足りない量を補うような物質は見つかっておらず、「光」に対して一切の感度を示さない「物質」が宇宙には存在すると仮定する考えが現在では主流となっている。これが「暗黒物質」(Dark matter) である。この暗黒物質の候補

として WIMP 粒子仮説と呼ばれるものが提唱されている。これは標準模型の粒子以外に中性かつ安定な重い (100~10000GeV) 粒子が存在し、これが観測にかからない宇宙の総物質質量と理論予測の差を占めていると仮定する。さらにこの仮説ではこの物質の対消滅断面積が 1pb 程度 (弱い相互作用のおおよそのスケール) であると仮定する。このような粒子の宇宙での振る舞いは Boltzmann 方程式で記述することができ、これを解けば、ラフな概算としては

$$\Omega h^2 = \frac{0.1\text{pb}}{\langle\sigma v\rangle_f} \quad (\text{A.231})$$

が得られる。具体的に MSSM 模型を仮定した上での [34]、Boltzmann 方程式の衝突項がどのようにに導出されるかみていくことにする。宇宙が最終的に膨張し続けるかやがて収縮に向かうかは、宇宙にどれだけの物質が存在するかで決まる。宇宙の膨張率が 0 に向かって漸近するような宇宙は、曲率 0 の時空を持ち、このときの「臨界密度」は、 $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/8\pi G$ で表される。これは超対称模型に照らして考えれば

$$\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} = \frac{m_{\tilde{\chi}_1^0} n_{\tilde{\chi}_1^0}}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{m_{\tilde{\chi}_1^0} s_0 Y_0}{\rho_{\text{crit}}} \quad (\text{A.232})$$

と表すことができる。何度か触れてきたが、 $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ は neutralino1 の質量であり、これは LSP である。これが我々のセットでの暗黒物質の候補に当たる。また、 $s_0 = s(T_0)$ はエントロピーであり、 $T_0 = 2.726\text{K}$ である。これは宇宙背景放射そのものの観測された温度であり、宇宙のエネルギースペクトルはこの温度での黒体輻射と見なすことができる。これについて詳細を調べるためには何らかの保存量が必要であるので、エントロピーの保存則に基づいて議論するために第 2 式の数密度 $n_{\tilde{\chi}_1^0}$ を第 3 式の「アバンダンス」 Y_0 で書き換えるアプローチをとることにより、時間発展の微分方程式の形に持ち込むことを考えているのである。ここで、

$$s(T) = h_{\text{eff}}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3 \quad (\text{A.233})$$

であり、 h_{eff} は温度に依存する関数である。

こうして暗黒物質残存量は

$$\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} h^2 = 2.755 \times 10^8 \frac{m_{\tilde{\chi}_1^0}}{\text{GeV}} Y_0 \quad (\text{A.234})$$

で表される。 Y の時間発展は

$$\frac{dY}{dT} = \sqrt{\frac{\pi g_*(T)}{45G}} \langle\sigma v\rangle (Y^2 - Y_{\text{eq}}^2) \quad (\text{A.235})$$

で表される。 $g_*(T)$ は宇宙の状態を記述する熱力学的自由度である。「熱平衡アバンダンス」が

$$Y_{\text{eq}}(T) = \frac{45}{4\pi^4 h_{\text{eff}}(T)} \sum_i g_i \frac{m_i^2}{T^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \quad (\text{A.236})$$

と導かれる。ここで i は各超対称粒子を表し m_i はその質量を表す。 K_n は order n のベッセル関数を表す。 $\langle\sigma v\rangle$ は「相対論的熱平衡共消滅断面積」と呼ぶことができ、

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{\sum_{i,j} g_i g_j \int \frac{ds \sqrt{s} (\sqrt{s}/T) p_{ij}^2 \sigma_{ij}(s)}{(m_i + m_j)^2}}{2T \left(\sum_i g_i m_i^2 K_2(m_i/T) \right)^2}, \quad (\text{A.237})$$

で表される。

E 標準模型の数値パラメーター

表 16: 本研究で用いた標準模型の数値パラメーターの具体的な数値。

u-quark mass	$58.0 \times 10^{-3} \text{ GeV}$	d-quark mass	$58.0 \times 10^{-3} \text{ GeV}$
c-quark mass	$1.5 \times 10^{-3} \text{ GeV}$	s-quark mass	$92.0 \times 10^{-3} \text{ GeV}$
t-quark mass	173.5 GeV	b-quark mass	4.7 GeV
W boson mass	80.4256 GeV	Z boson mass	91.187 GeV
Higgs mass	125.1 GeV	QED fine structure constant	1/137.036

参考文献

- [1] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond., A1928 **117**, doi: 10.1098/rspa.1928.0023.
- [2] ATLAS Collaboration, Phys. Lett., B **716**, 1 (2012).
- [3] CMS Collaboration, Phys. Lett., B **716**, 30 (2012).
- [4] Y. Kouda, T. Kon, Y. Kurihara, T. Ishikawa, M. Jimbo, K. Kato, and M. Kuroda, Prog. Theor. Exp. Phys., **2017-5**, 053B02 (2017).
- [5] Y. Kouda, T. Kon, Y. Kurihara, T. Ishikawa, M. Jimbo, K. Kato, and M. Kuroda, Prog. Theor. Exp. Phys., **2018-8**, 083B03 (2018).
- [6] J. Fujimoto, T. Ishikawa, M. Jimbo, T. Kaneko, K. Kato, S. Kawabata, T. Kon, M. Kuroda, Y. Kurihara, Y. Shimizu, and H. Tanaka, Comput. Phys. Commun., **153**, 106 (2003).
- [7] J. Fujimoto, T. Ishikawa, Y. Kurihara, M. Jimbo, T. Kon, and M. Kuroda, Phys. Rev. D, **75**, 113002 (2007).
- [8] A. Djouadi, J.-L. Kneur, and G. Moultaka, Comput. Phys. Commun., **176**, 426 (2007).
- [9] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, Comput. Phys. Commun., **149**, 103 (2002).
- [10] W. Hollik and C. Schappacher, Nucl. Phys., B **545**, 98–140 (1999).
- [11] J. Cao, C. Han, J. Ren, L. Wu, J. Yang, M. Jin and Y. Zhang, Chin. Phys. C, **40**, 113104 (2016).
- [12] Binnewies, B. A. Kniehl, and G. Kramer Phys., Rev. D, **52**, 4947 (1995).
- [13] Johan Alwall and Michel Herquet and Maltoni, Olivier Mattelaer, and Tim Stelzer JHEP., **06**, 128 (2011).
- [14] Hahn, Thomas Comput. Phys. Commun. **140**, 418-431 (2001).
- [15] E. Boos, M. Dubinin, V. Ilyin, A. Pukhov, V. Savrin, SNUTP-94-116, INP-MSU-94-36-358;
- [16] M. Jimbo, T. Kon, Y. Kouda, M. Ichikawa, Y. Kurihara, T. Ishikawa, K. Kato, and M. Kuroda, (2017). arxiv:1703.07671 [hep-ph]
- [17] K. A. Olive, PoS, **PLANCK2015**, 093 (2015).

- [18] H. Baer, T. Barklow, K. Fujii, Y. Gao, A. Hoang, S. Kanemura, J. List, H. E. Logan, A. Nomerotski, M. Perelstein, et al. (2013), arXiv:1306.6352.
- [19] T. Becher and M. Neubert, Phys. Rev. Lett., **98**, 022003 (2007).
- [20] Howard Georgi and S. L. Glashow Phys. Rev. Lett. 32, 438 Published 25 February 1974
- [21] K.Abe et al.(Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. D, **95**, 012004 (2017).
- [22] N. Sakai, Z. f. Phys., C11, 153 (1981).
- [23] K. Hikasa and M. Kobayashi, Phys. Rev. D, **36**, 724–732 (1987).
- [24] A. Hoecker and W. J. Marciano, The Muon Anomalous Magnetic Moment, in Particle Data Group, Chin. Phys., C, **38**, 090001 (2014); p.649 (updated August 2013), references therein.
- [25] G. C. Cho, K. Hagiwara, Y. Matsumoto, and D. Nomura, JHEP., **11**, 068 (2011).
- [26] A. Ibarra, A. Pierce, N. R. Shah, and S. Vogl, Phys. Rev. D, **91**, 095018 (2015).
- [27] J. Ellis, K. A. Olive, and J. Zheng, Eur. Phys. J., C, **74**, 2947 (2014).
- [28] Planck Collaboration (2015), arXiv:1502.01582.
- [29] P. W. Johnson, F. I. Olness, and Wu-Ki Tung, Phys. Rev. D, **36**, 291 (1987).
- [30] S. Dulat et al. Phys.Rev. D, **93**, 033006 (2016).
- [31] Enrico Fermi ReV. mod. Phys., **4**,87 doi: 10.1103/RevModPyhs.4.87
- [32] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B, 70 (1974) 39.
- [33] L.P. Kadanoff and G. Baym, W.A. Benjamin Inc., Chapters 610 (1962)
- [34] J. Edsjo and P. Gondolo, Phys.Rev. D, **56**, (1997).