

被覆弾性層－弾性基質体の軸対称接触問題の解析解とその応用

三浦 鴻太郎*¹, 坂本 信*², 田邊 裕治*³

An Analytical Solution of Axisymmetric Contact Problem of Elastic Layer-substrate Body

Kotaro MIURA *¹, Makoto SAKAMOTO *², Yuji TANABE *³

ABSTRACT : We consider an elastic contact problem for indentation test of layer-substrate body. An elastic layer assumed to be perfectly bonded to an elastic semi-infinite substrate. This problem called Boussinesq's problem which is axisymmetric mixed boundary value problem in elasticity theory. The elastic layer is smoothly indented by a flat-ended cylindrical and spherical indenter. This paper presents not only distribution of the dimensionless normal contact stress under cylindrical and spherical indenters but also distribution of the dimensionless normal displacement at the upper surface of the elastic layer. Numerical results are given for several combinations of the ratio of shear modulus, Poisson's ratio of elastic layer and substrate and the thickness of elastic layer. These results may establish the foundation for indentation test of layer-substrate composite and provide guideline for design of mechanical property of layered materials.

Keywords : elastic contact problem, indentation test, Boussinesq's problem, analytical solution, layer-substrate body

(Received October 29, 2019)

1. はじめに

インデンテーション（押し込み）試験は力学的特性を評価する簡便な手法として広く利用されている¹⁾。被覆層を有する材料に対しては基質物体から取り除くことなく試験が行えることから、コーティング材料のコーティング層やバイオエンジニアリングの分野では軟骨下骨上の関節軟骨²⁾、皮膚組織等³⁾の力学的特性評価に用いられている。このような被覆層を有する物体のインデンテーション試験による力学的特性評価の問題点は実験結果に被覆層と基質物体の影響が混在していることである。純粋に被覆層単一の材料特性を知るためには、基質物体が被覆層へ及ぼす影響を調べる必要があり、その影響に関して研究が行われてきた^{4), 5)}。しかし、それらのほとんどは有限要素解析や近似理論によるものであって、厳密に弾性論に基づいて理論解析している研究は少ない。被

覆層を有する物体に対する理論解析は、数学的解析手法の難解さおよび煩雑さから、多くは行われていない。しかし、理論解析を行うことによって各パラメータが数値結果に及ぼす影響を数式から明らかにすることは大いに意義のあることである。

半無限弾性体で表わされた弾性基質上に密着した弾性層を剛体圧子で押し込む接触問題は、以前にDhaliwal⁶⁾やYura⁷⁾によって理論解析されている。彼らは問題解析において生じる双積分方程式を第二種Fredholm型積分方程式に変換することにより解析している。しかしながら、これらの研究では、剛体圧子の押し込み力に関する数値結果は示されているが、弾性層の変位や応力に関する数値結果には示されていない。また、いずれの研究による数値結果は、数値計算法に一長一短があり、数値計算で与えるパラメータの値によっては計算精度が低下することが予想される。

上記のことから本研究では、弾性基質（半無限弾性体）上に密着した弾性層を円柱状および球状圧子で押し込む軸対称弾性接触問題を三次元弾性論に基づき厳密に理論解析した。本研究における押し込み力の数値結果をいくつか

*¹ : 理工学部システムデザイン学科助教(k_miura@st.seikei.ac.jp)

*² : 新潟大学医学部保健学科教授

*³ : 新潟大学自然科学研究科材料生産システム専攻教授

の過去の研究の数値結果と比較して、その数値結果の妥当性について検証した。さらには、弾性層上面の圧子の接触応力分布および垂直変位の数値結果を示すとともに、これらに及ぼす弾性層の厚さや弾性層と半無限弾性体の機械的特性の影響について明らかにした。

2. 三次元弾性論による理論解析

図1に示すように円柱座標 (r, θ, z) において、弾性基質上に密着した厚さ h の弾性層上面を円柱状および球状圧子で微小変位量 ϵ_0 だけ押込む軸対称接触問題を考える。

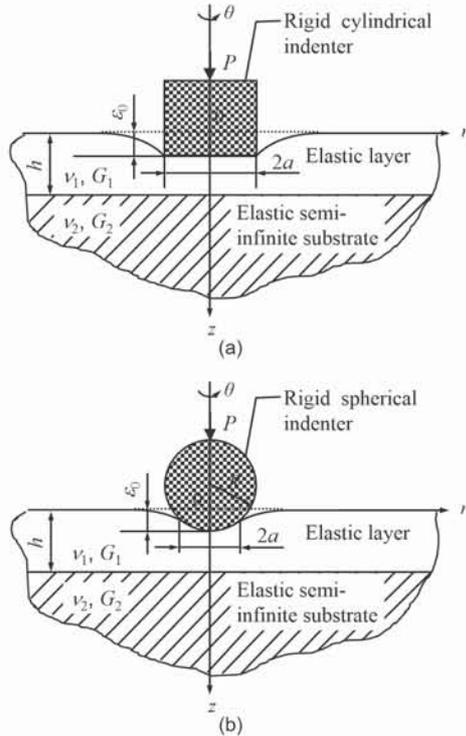


図1 弾性基質上の弾性層を剛体圧子で押込む軸対称弾性接触問題
(a: 円柱状圧子, b: 球状圧子)

弾性体の変位成分を (u_r, v_θ, w_z) 、応力成分を $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z})$ とすると、弾性層と弾性基質の変位と応力は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 2G_1 u_r^{(i)} &= \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial r} \\
 v_\theta^{(i)} &= 0 \\
 2G_1 w_z^{(i)} &= \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z} - (3 - 4\nu_1) \varphi_3^{(i)} \\
 \sigma_r^{(i)} &= \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial r^2} - 2\nu_1 \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z} \\
 \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{r \partial r} + z \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{r \partial r} - 2\nu_1 \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z} \\
 \sigma_z^{(i)} &= \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial z^2} - 2(1 - \nu_1) \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z} \\
 \tau_{rz}^{(i)} &= \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu_1) \frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial r} \\
 \tau_{r\theta}^{(i)} &= \tau_{\theta z}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

ここで、上添字 $i = 1, 2$ はそれぞれ弾性層、弾性基質を表わしている。

本研究では、調和応力関数 $\varphi_0^{(i)}, \varphi_3^{(i)}$ ($i = 1, 2$)を次のように選ぶ。

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^{(1)} &= \int_0^\infty \{D^{(1)}(\lambda) \cosh \lambda z + A^{(1)}(\lambda) \sinh \lambda z\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 \varphi_3^{(1)} &= \int_0^\infty \{B^{(1)}(\lambda) \sinh \lambda z + C^{(1)}(\lambda) \cosh \lambda z\} J_0(\lambda r) d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^{(2)} &= \int_0^\infty A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\
 \varphi_3^{(2)} &= \int_0^\infty \{B^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

ここで、 $A^{(1)}(\lambda), B^{(1)}(\lambda), C^{(1)}(\lambda), D^{(1)}(\lambda), A^{(2)}(\lambda)$ および $B^{(2)}(\lambda)$ は境界条件および弾性層と弾性基質の界面における変位と応力の連続条件から決定される未知関数であり、 $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。

弾性層が剛体圧子で押込まれるとき、弾性層と圧子の間で摩擦はないと仮定すれば、弾性層表面における境界条件は次式で与えられる。

$$(w_z)_{z=0} = \epsilon_0 - f(r), \quad (0 \leq r \leq a) \tag{4}$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0, \quad (a < r < \infty) \tag{5}$$

$$(\tau_{rz})_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \tag{6}$$

ここで、 $f(r)$ は圧子形状を表わしている。

次に、 $z = h$ の弾性層と弾性基質の境界面は完全密着していることから、以下のような変位と応力の連続条件を満たす必要がある。

$$[\{S^{(1)}\} = \{S^{(2)}\}]_{z=h} \tag{7}$$

ここで,

$$\{S^{(i)}\} = [u_r^{(i)} \quad w_z^{(i)} \quad \sigma_z^{(i)} \quad \tau_{rz}^{(i)}] \quad (8)$$

式(2), (3)を変位と応力の基礎式(1)に代入して, 境界条件式(4), (5), (6)を適用すると, 次の係数間の関係式が得られる.

$$\lambda A^{(1)}(\lambda) = (1 - 2\nu_1)C^{(1)}(\lambda) \quad (9)$$

一方, 弾性層と弾性基礎の境界面における連続条件式(7)を基礎式(1)に適用すると, 以下の未知関数に関する連立方程式が得られる.

$$M \begin{bmatrix} B^{(1)}(\lambda) \\ C^{(1)}(\lambda) \\ D^{(1)}(\lambda) \\ A^{(2)}(\lambda) \\ B^{(2)}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで, $\beta = \lambda h, \Gamma = G_1/G_2$ として, マトリックス M は以下の形で表わされる.

$$M = \begin{bmatrix} \beta \sinh \beta & \beta \cosh \beta + (1 - 2\nu_1) \sinh \beta \\ \beta \cosh \beta - (3 - 4\nu_1) \sinh \beta & \beta \sinh \beta - 2(1 - \nu_1) \cosh \beta \\ \beta \cosh \beta - (1 - 2\nu_1) \sinh \beta & \beta \sinh \beta \\ \beta \sinh \beta - 2(1 - \nu_1) \cosh \beta & \beta \cosh \beta - \sinh \beta \\ \lambda \cosh \beta & -\Gamma e^{-\beta} \lambda & -\Gamma e^{-\beta} \beta \\ \lambda \sinh \beta & \Gamma e^{-\beta} \lambda & \Gamma e^{-\beta} \{\beta + (3 - 4\nu_2)\} \\ \lambda \sinh \beta & e^{-\beta} \lambda & e^{-\beta} \{\beta + (1 - 2\nu_2)\} \\ \lambda \cosh \beta & -e^{-\beta} \lambda & -e^{-\beta} \{\beta + 2(1 - \nu_2)\} \end{bmatrix} \quad (11)$$

未知関数に関する連立方程式(10)を解くことにより, 未知関数を一つにまとめることができる. しかし, この連立方程式を解くためには非常に煩雑な代数計算が必要となるため, 数式処理ソフトウェアであるwxMaxima (ver.13.04.2, MIT) を利用して解いた.

弾性層表面の垂直変位(w_z) $_{z=0}$ と圧子と弾性層間における接触面における垂直応力(σ_z) $_{z=0}$ は, 式(10)を解くことにより, 一つにまとめられた未知関数 $C^{(1)}(\lambda)$ を用いて表現でき, 境界条件式(4), (5)を適用することで, 以下のように入えられる.

$$(w_z)_{z=0}^{(i)} = -\frac{1 - \nu_1}{G_1} \int_0^\infty C^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \varepsilon_0 - f(r), \quad (0 \leq r < a) \quad (12)$$

$$(\sigma_z)_{z=0}^{(i)} = \int_0^\infty \frac{e_3(\lambda)}{e_0(\lambda)} C^{(1)}(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (a < r < \infty) \quad (13)$$

ここで,

$$\begin{aligned} e_0(\lambda) &= a(\lambda)\Gamma^2 + b(\lambda)\Gamma + c(\lambda) \\ e_3(\lambda) &= d(\lambda)\Gamma^2 + e(\lambda)\Gamma + f(\lambda) \\ a(\lambda) &= (4\nu_2 - 3)e^{4\beta} + (16\nu_2 - 12)\beta e^{2\beta} - 4\nu_2 + 3 \\ b(\lambda) &= \{(12 - 16\nu_1)\nu_2 + 12\nu_1 - 10\}e^{4\beta} + (8 - 16\nu_2)\beta e^{2\beta} \\ &\quad + 4\nu_2 + 4\nu_1 - 6 \\ c(\lambda) &= (4\nu_1 - 3)e^{4\beta} + 4\beta e^{2\beta} - 4\nu_1 + 3 \\ d(\lambda) &= (4\nu_2 - 3)e^{4\beta} + \{(12 - 16\nu_2)\beta^2 - 8\nu_2 + 6\}e^{2\beta} \\ &\quad + 4\nu_2 - 3 \\ e(\lambda) &= \{(12 - 16\nu_1)\nu_2 + 12\nu_1 - 10\}e^{4\beta} \\ &\quad + \{(16\nu_2 - 8)\beta^2 + (16\nu_1 - 8)\nu_2 - 8\nu_1 + 4\}e^{2\beta} - 4\nu_2 - 4\nu_1 + 6 \\ f(\lambda) &= (4\nu_1 - 3)e^{4\beta} + (-4\beta^2 - 16\nu_1^2 + 24\nu_1 - 10)e^{2\beta} + 4\nu_1 - 3 \end{aligned} \quad (14)$$

である.

連立積分方程式(12), (13)は従来の解析方法では, 第二種Fredholm積分方程式に帰着させて数値的に解く手法が一般的である^{9,7)}. これに対して, 本解析では接触面における垂直応力をTchebycheffの直交多項式 $T_n(x)$ によって級数展開することにより, 最終的に無限連立一次方程式の解法問題に帰着させる解析手法を適用する.

接触面における垂直応力(σ_z) $_{z=0}$ をTchebycheffの直交多項式を用いることにより, 以下のように級数展開する.

$$(\sigma_z)_{z=0}^{(i)} = \frac{2}{\pi r(a^2 - r^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^\infty x_n T_{2n+1}(r/a), \quad (0 \leq r < a) \quad (15)$$

$x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ は未知係数である. また, Tchebycheffの直交多項式に関して以下の積分公式が成立する.

$$\int_0^\infty \lambda Z_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0, & (a < r < \infty) \\ \frac{2T_{2n+1}(r/a)}{\pi r(a^2 - r^2)^{1/2}}, & (0 \leq r < a) \end{cases} \quad (16)$$

ここで,

$$Z_n(\lambda) = J_{n+1/2}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-n-1/2}\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

である.

式(13), (15)に対して, それぞれHankel逆変換を適用すると, 以下の式が得られる.

$$C^{(1)}(\lambda) = \frac{e_0(\lambda)}{e_3(\lambda)} \sum_{n=0}^\infty x_n(\lambda) Z_n(\lambda) \quad (18)$$

式(18)を式(12)に代入して、以下に示されるGegenbauerの公式、

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos m\phi, \quad (r = a \sin(\phi/2)) \quad (19)$$

を用いることにより、式(12)を以下の形に変形することができる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \int_0^a p(\lambda) Z_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos m\phi d\lambda = \frac{G_1}{1 - \nu_1} \{-\varepsilon_0 + f(r)\}, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (20)$$

ここで、 δ_{0m} はKroneckerのデルタであり、 $p(\lambda)$ 、 $X_m(\lambda)$ はそれぞれ以下の形で表わされる。

$$p(\lambda) = \frac{e_0(\lambda)}{e_3(\lambda)} \quad (21)$$

$$X_m(\lambda) = J_m^2(\lambda a/2), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

円柱状圧子の場合、 $f(r) = 0$ であり、式(20)の両辺の $\cos m\phi$ に関する係数を等置すれば、本問題は以下の無限連立一次方程式の解法問題に帰着する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n A_{mn} = \delta_{0m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

ここで、 b_n 、 A_{mn} は以下の形で表わされる。

$$b_n = -\frac{1 - \nu_1}{G_1 \varepsilon_0} x_n \quad (24)$$

$$A_{mn} = \int_0^a p(\lambda) X_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda \quad (25)$$

同様に球状圧子の場合についても、最終的に以下のような無限連立一次方程式に帰着することができる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n, c_n) A_{mn} = (\delta_{0m}, \delta_{1m}/2), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

3. 数値結果および考察

本研究では、接触面における垂直応力、弾性層表面の垂直変位、剛体円柱状圧子縁における応力特異性係数および押し込み力の数値結果を算出した。押し込み力の数値結果に関しては、Dhaliwal⁶⁾、Yuら⁷⁾およびGaoら⁴⁾の近似解とFEMによる数値結果との比較を行った。ここでは、押し込み力の結果を数値結果の一例として示す。

図2, 3, 4は、弾性層と弾性基礎のPoisson比 ν_1, ν_2 をそれぞれ $\nu_1 = 0.333, \nu_2 = 0.250, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ および $\nu_1 =$

$\nu_2 = 0.25$ とした際の圧子押し込み力とアスペクト比 h/a の関係を示している。圧子押し込み力 P は、弾性層と力学的特性が同じ半無限体の押し込み力 P_1 により無次元化している。Poisson比と横弾性係数比 $\Gamma = G_1/G_2$ の値は文献を参照して決定しており、それぞれの図において過去文献の押し込み力の結果と本解析結果を比較している。

まず、Dhaliwal⁶⁾の結果と比較すると、本解析結果と彼らの結果は良く一致していることがわかる。Yuら⁷⁾の結果と比較すると、両結果は概ね良く一致しているが、 h/a が大きい範囲では両結果の差異が増大する傾向にある。しかし、 $h/a > 10$ の範囲は円柱状圧子径に対して弾性層厚さが十分に厚い状態であり、実際のコーティング材料や薄膜のインデンテーション試験を想定する際には重要ではないと考えられる。Gaoら⁴⁾の結果と比較すると、彼らの近似解とは差異が見られるが、彼らが同様に行ったFEMの結果とは良く一致している。

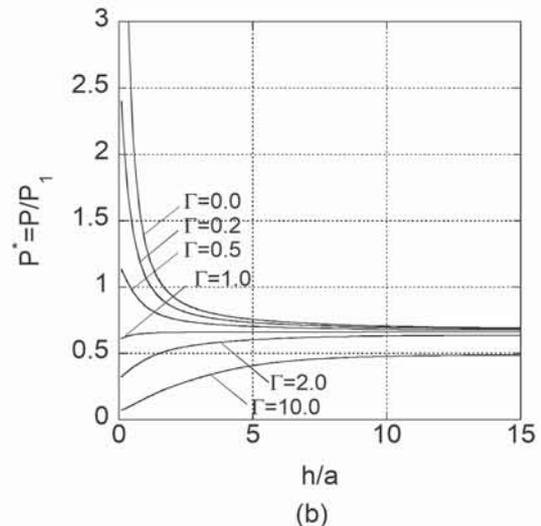
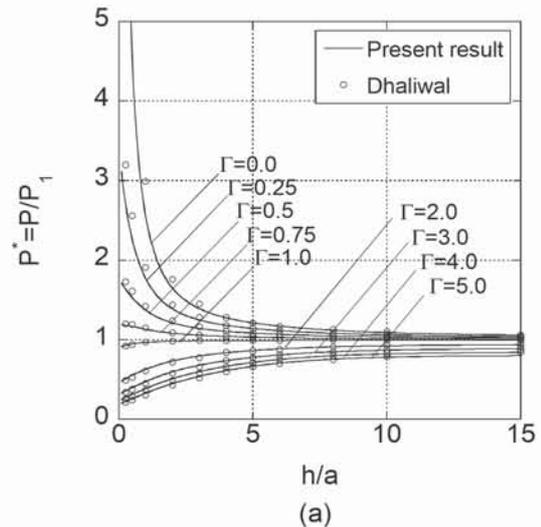


図2 押し込み力の数値結果
(a: 円柱状圧子, b: 球状圧子, $\nu_1 = 0.333, \nu_2 = 0.250$)

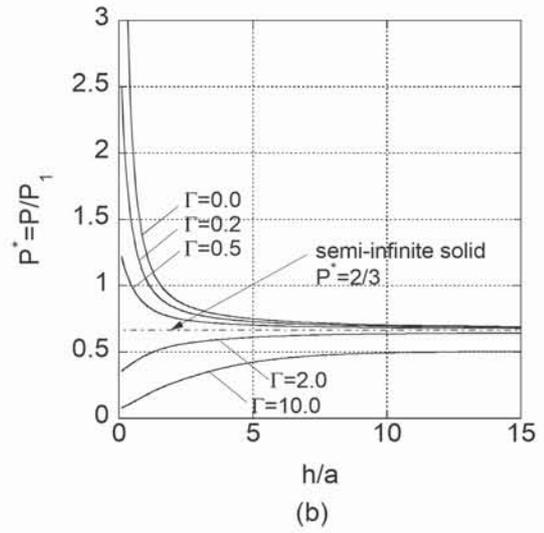
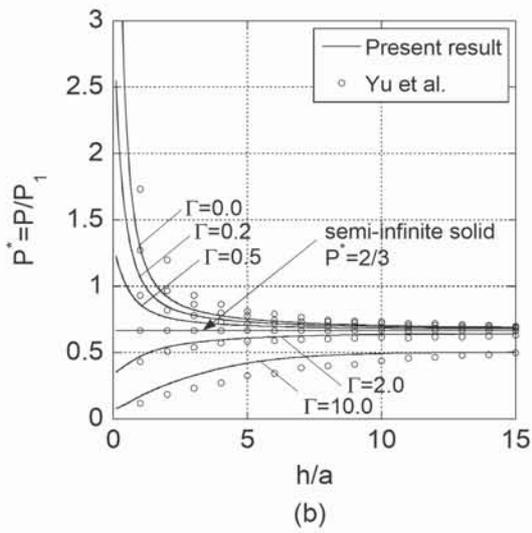
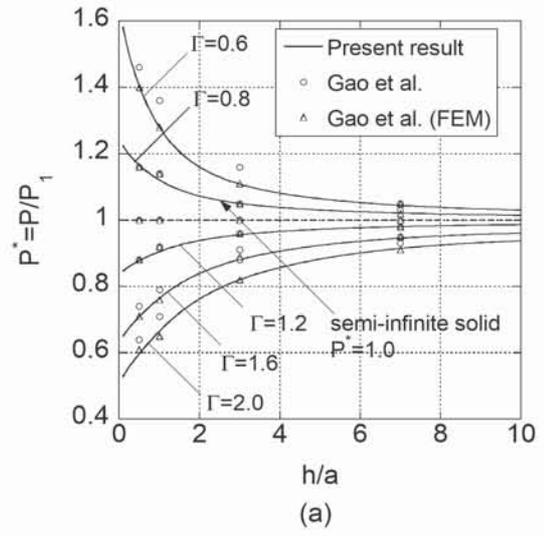
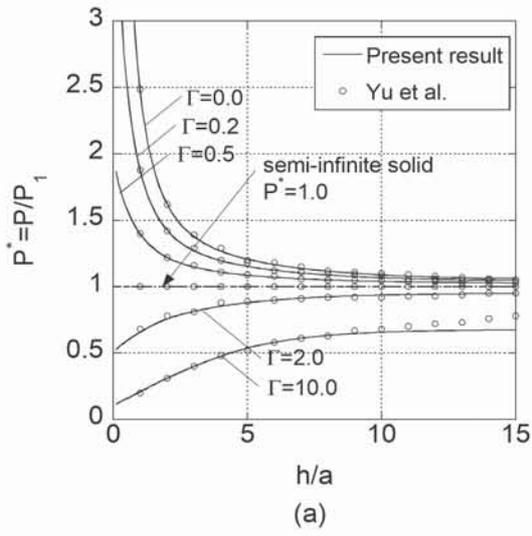


図3 押し込み力の数値結果
(a: 円柱状圧子, b: 球状圧子, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)

図4 押し込み力の数値結果
(a: 円柱状圧子, b: 球状圧子, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$)

4. むすび

本研究では被覆弾性層-弾性基質体のインデンテーション試験法に関連した、弾性基質上に密着した弾性層を円柱状および球状圧子で押込む軸対称弾性接触問題に対して理論解析を行い、いずれの問題も無限連立一次方程式の解法問題に帰着させた。そして、本研究における押込み力の数値結果を、いくつかの過去の研究例の数値結果と比較して、その妥当性について調べた。その結果、本研究の数値結果と過去文献の結果は概ね一致していることが確認できた。

本研究で用いた直交多項式により応力もしくは変位を無限級数で展開することによって、積分方程式を無限連立一次方程式に帰着する解法は、汎用性のある解析手法である。例えば、接触問題に対応するき裂問題⁸⁾、粘弾性接触問題⁹⁾や積層弾性体の接触問題¹⁰⁾に応用することができる。これらの接触問題の解析解を示すことで、新しい実験手法およびコーティング材料や生体材料などの材料開発に関して知見を与えることができると考えている。

参考文献

- 1) Fischer-Cripps, A. C., *Nanoindentation*. Springer-Verlag, (2002).
- 2) Berteau, J. P., Oyen, M., and Shefelbine, S. J., "Permeability and Shear modulus of Articular Cartilage in Growing Mice", *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Vol. 15, No. 1 (2016), pp.205-212.
- 3) Geerligs, M., Van Breemen, L., Peters, G., Ackermans, P., Baaijens, F., and Oomens, C., "In Vitro Indentation to Determine the Mechanical Properties of Epidermis", *Journal of Biomechanics*, Vol. 44, No.6 (2011), pp.1176-1181.
- 4) Gao, Y. F., Xu, H. T., Oliver, W. C., and Pharr, G. M., "Effective Elastic Modulus of Film-on-Substrate Systems under Normal and Tangential Contact", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 2 (2008), pp.402-416.
- 5) Argatov, I. I., and Sabina, F. J., "Small-Scale Indentation of an Elastic Coated Half-Space. Influence of Poisson's Ratios on the Substrate Effect", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 81 (2014), pp.33-40.
- 6) Dhaliwal, R. S., "Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 8, No. 4 (1970), pp. 273-288.
- 7) Yu, H. Y., Sanday, S. C., and Rath, B. B., "The Effect of Substrate on the Elastic Properties of Films Determined by the Indentation Test - Axisymmetric Boussinesq Problem", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 38, No.6 (1990), pp. 745-764.
- 8) Miura, K., Sakamoto, M., Kobayashi, K., Pramudita, J. A., and Tanabe, Y., "An Analytical Solution for the Axisymmetric Problem of a Penny-shaped Crack in An Elastic Layer Sandwiched between Dissimilar Materials", *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 5, No.3 (2018), 18-00125.
- 9) Miura, K., Sakamoto, M., Kobayashi, K., Pramudita, J. A., and Tanabe, Y., "Viscoelastic Relaxation Indentation Theory of Thin-layer Tissue", *8th World Congress of Biomechanics (WCB 2018)*, No.P1504 (2018).
- 10) Miura K., Sakamoto M., and Tanabe, Y., "The Effect of Elastic Properties on Indentation Test for Multi-layered Materials", *International Conference on Advanced Technology in Experimental Mechanics 2019*, (2019).