

最適線形判別関数の応用（2）

- 2011年度の統計入門の分析 -

新 村 秀 一

1. 初めに

2010年から経済学部1年生に対し、統計入門を担当している。中間試験と期末試験を10択100問のマークセンス試験を行い、統計ソフトのJMP[2][4][12]と数理計画法ソフトのLINGO[5][6][10][13]で試験結果の統計分析を行った。この分析結果から、受講生の理解度、各設問の難易度、マークシートの読み取り間違いの率、などのFDに利用できることを示した[7][8]。

また、1936年にFisherが始めた統計的判別関数に多くの問題があり、特に試験の合否判定のような、いわゆる誤分類数0（線形分離可能）の判別で問題があることを示した[3][9]。この成果を受けて、2011年以降、大学入試センターから過去4年間の試験データの提供を受け、体系的に統計分析することにした。一方、筆者が出題する統計入門の試験は、出題の難易度は自分自身で管理できるので並行して研究を継続することにした。

特に2011年度は、政府からの電力節減要請による半舷授業のため、15回で予定していた授業回数を11回に途中から変更する必要があった。地震による研究室の本棚の工事のための整理、半舷授業のための講義内容の組み換え、6月13日から24日の間に集中して行った8回の法人地区の内部監査とこれまで以上の忙しい半期であったが、一番の関心事は4回授業回数が少ないことによる学生の習熟度への影響の分析を行う必要がある。

2011年度は、1年次生127人、2年次生以上は4名の計131名の受講生である。半舷授業の決定を受け、1変量を試験範囲とする中間試験は昨年度と同じ7回目（5月30日）に設定したが、6回目に期末試験範囲の相関分析の授業を行った。8回目はExcelによる相関係数の計算法、9回目は単回帰分析、10回目は分割表、11回目は期末試験に予定を変更した。昨年より4回分の減少を「中間試験の範囲に1回分、期末試験の範囲に3回分の授業回数の削減を行った。講義範囲は一切変更せず、重要な内容を無駄なくコンパクトに教えて乗り切った。

しかし、受講生には初めて学ぶ内容の理解不足が心配であった。さらに、試験問題は昨年度より5点ほど難しい内容にした。中間試験は授業圧縮の影響を受けていないが昨年度の中央値より5点ほど下がった。期末試験は3回の圧縮であったが、結果的には中間試験と同じ中央値が5点ほど下がっただけである。この理由としては次のことが考えられる。

- ・昨年度の授業に無駄があった。

- ・昨年より、予習を積極的にアドバイスしテキストの購入者が増えたようで、その効果が考えられる。
- ・8回目以降は、黒板の板書はやめ、講義内容を事前にIt'sClassにアップした。
- ・試験内容の宿題は昨年度と同じであるが、9回目に宿題2と宿題3を早めに示し、Excelの計算式を事前にUPした。

実際、中間試験が80点で期末試験が99点で通期1位になった学生（2名中の1名）からヒアリングを行った。「事前にUPした講義ノートで予習し自分で黒板を板書する必要がなくなり後半の方が楽であった。そして教科書の予習に努めたので、中間試験より楽であり、試験の1週間前は他の授業内試験もありそちらの方に時間を割いた」とのことである。

2. 中間試験の分析結果

2.1 総合得点と大問の分布

図1は、中間試験の得点分布の結果である。合否判定は、10%点（42点）、50%点（60.5点）、90%点（79点）の3水準を考える。10%点を用いたのは、統計入門の実際の基準であり、必修の入門科目として適した水準であると考えた。50%点は、判別超平面上に多くの受験生がきて、判別分析にとって有意な情報が得られると考えた。90%点を用いたのは、10%点と対をなし、合否が難しい試験をイメージしている。

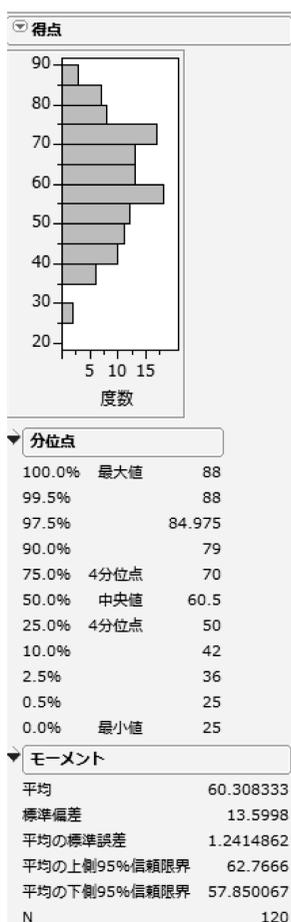


図1 中間試験の得点分布

図2は、大問9問(S1からS9で表わす)の得点分布である。大問1(S1)は8点満点で90%点は6点で、最高点に比べ0.66667であり比較的難しかった。大問5(S5)は16点満点で90%点は10点で、最高点の16点に比べ0.625である。大問6(S6)は8点満点で90%点は7点で、最高点に比べ0.875である。大問8(S8)は7点満点で90%点は6.9点で、最高点に比べ0.98571であり比較的やさしかったようである。

大問2(S2)は12点満点で90%点は12点で、ヒストグラムが示すように最高点から最低点の4点まで急激に減少する楽勝出題と考えられる。これは、大問3(S3, 最高点11点), 大問4(S4, 最高点8点), 大問7(S7, 最高点22点), 大問9(S9, 最高点3点, 正規性の適合度検定)も楽勝出題と考えられる。

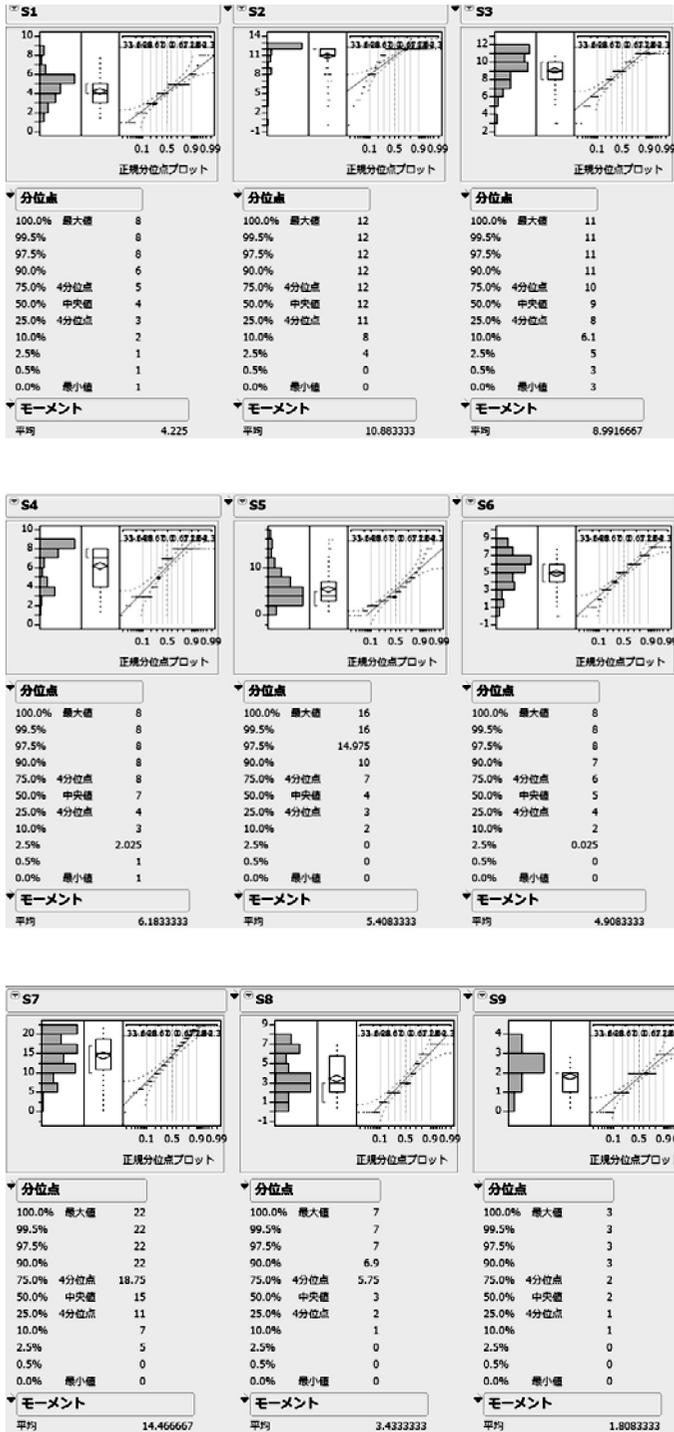


図2 大問9問の得点分布

2.2 大問9問の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

主成分分析を行うと、固有値が1以上は主成分2までで、累積固有値は約49%である。

表1は第2主成分までの因子負荷量であり、図3は因子負荷プロットである。

表1 因子負荷量

	C1	C2
S1	0.27	0.68
S2	0.54	-0.42
S3	0.73	-0.13
S4	0.54	-0.12
S5	0.56	0.23
S6	0.66	-0.27
S7	0.83	0.03
S8	0.73	0.00
S9	0.43	0.52

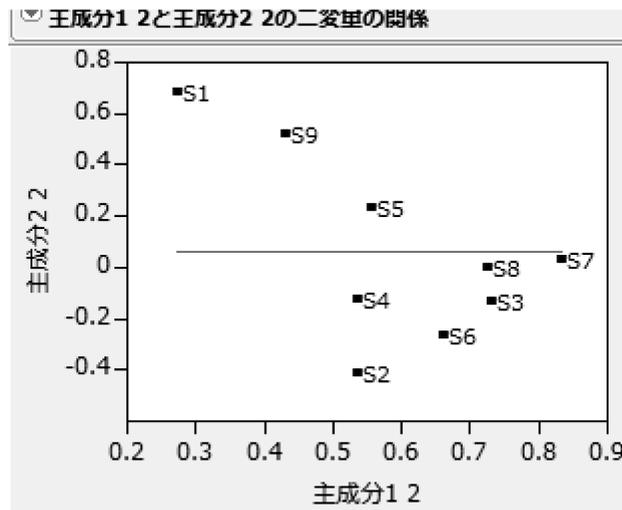
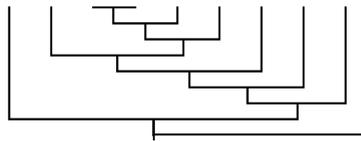


図3 主成分分析の固有値と因子負荷量のプロット

S7とS8は第1主成分と0.83と0.73の相関があり、第2主成分とはほぼ0である。S5、S9、S1は第1主成分とは0.56から0.27へ減ると反比例し、第2主成分との相関は0.23から0.68へと増えた。残りは第4象限にあり、S3、S6、S2、S4と第1主成分との相関が0.73から0.54へと減り、第2主成分とは負の相関が大きくなった。

図4はクラスター分析の結果である。S3とS7が最初にクラスター化され、それにS8、S6の順にクラスター化されている。最後に、S9がクラスター化されている。



S1 S2 S3 S4 S5 S6 S7 S8 S9

図4 クラスター分析

(2) 誤分類数の検討

表2は、上から順に10%点、50%点、90%点の合否判定の分析結果である。pは変数増加法で選ばれた説明変数を表す。

合否判定10%すなわち実際の合否判定基準の場合、変数増加法とAICは3変数、Cp統計量は2変数を選んだ。LDFとQDは、Fisherの線形判別関数と2次判別関数の誤分類数(NM, Number of Misclassifications)を示すが、9変数でも合否判定できなかった。ロジスティック回帰(NM=0で必ず推定値が不安定になる[1][11])は8変数で、SVM(ペナルティC=10⁶で改定LP-OLDFと同じ)[14]と改訂IPLP-OLDFは7変数で合否判定できた。すなわち、大問1と大問5は合否判定に関係しなかった。

合否判定50%の場合、変数増加法とAICは7変数、Cp統計量は1変数を選んだ。LDFとQDは9変数でも合否判定できなかった。ロジスティック回帰は、推定が不安定ではあるが6変数で、SVM(ペナルティC=10⁶)と改訂IPLP-OLDFは9変数で合否判定できた。改訂IPLP-OLDFは6変数で線形分離にならなかった。

合否判定90%の場合、変数増加法とAICは6変数、Cp統計量は5変数を選んだ。LDFとQDは9変数でも合否判定できなかった。ロジスティック回帰とSVM(ペナルティC=10⁶)と改訂IPLP-OLDFは8変数で合否判定できた。すなわち、大問9は合否判定に関係しなかった。この問題は推測統計学に関するもので、設問数が3問であるためであろう。

表2 大問の分析 (ZEROはSVMの判別超平面の個数を示す)

p	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	S2	154	11.86	14	16	20	6	2	6
2	S7	142	0.25	9	14	4	4	1	3
3	S3	141	-0.43	10	9	5	3	0	2

4	S6	142	0.30	11	11	4	3	0	1
5	S8	144	2.10	11	10	4	2	0	1
6	S4	147	4.05	10	9	4	2	0	1
7	S9	149	6.01	10	3	5	0	0	0
8	S5	151	8.00	10	3	0	0	0	0
9	S1	154	10	10	1	0	0	0	0
1	S7	256	0.603	11	11	11	8	1	6
2	S5	222	0.652	7	7	7	9	0	6
3	S3	211	0.688	7	6	6	5	0	3
4	S4	206	0.706	6	6	5	4	0	2
5	S8	203	0.719	6	3	2	5	0	2
6	S6	202	0.727	6	2	0	4	0	2
7	S1	201	0.733	5	2	0	4	0	2
8	S9	204	0.734	5	2	0	4	0	2
9	S2	206	0.734	5	5	0	0	0	0
1	S7	262	58.88	22	17	17	8	1	6
2	S5	241	29.93	18	17	16	9	0	6
3	S1	232	18.55	16	17	15	9	0	5
4	S4	222	8.616	13	9	7	5	0	4
5	S6	218	4.442	10	6	6	5	0	3
6	S8	219	4.929	8	8	3	5	0	2
7	S3	221	6.388	8	6	2	4	0	2
8	S2	223	8.198	8	10	0	0	0	0
9	S9	225	10	6	8	0	0	0	0

注:Var., AIC, Cp列で四角で囲んだものは,変数増加法, AIC, Cpで選ばれたモデル。Logiは収束が不安定になったモデル。ZEROはSVMで判別超平面上のケース数で,両方とも0になるモデルで,最小の設問数を示す。IPLPは改定IPLP-OLDFで最小の設問数を示す。

2.3 小問100個の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

第13主成分までが固有値1以上であり, 寄与率は約55%である。図5は, 小問100個の因子負荷プロットである。因子負荷プロットから, 6と40が第2象限に, 87が第1象限で第1主成分との相関が0.7と一番大きいこと等が分かるが, 今後の検討課題である。

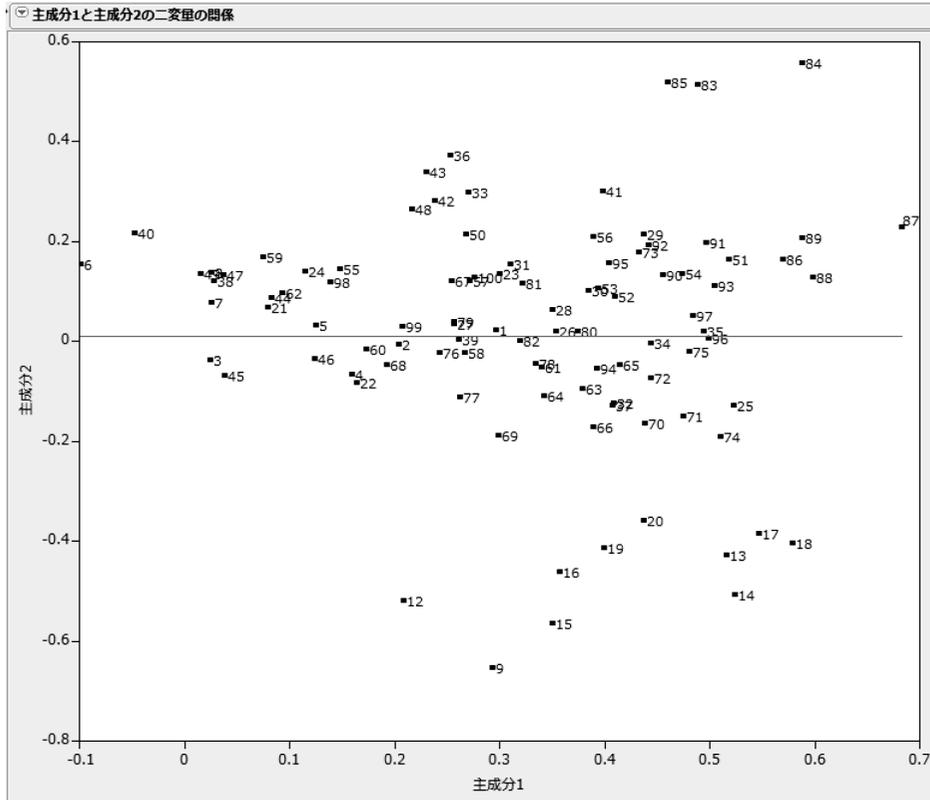


図5 小問100個の因子負荷プロット

図6は、変数のクラスター分析である。今後具体的な設問の難易度との関係性を調べる必要がある。

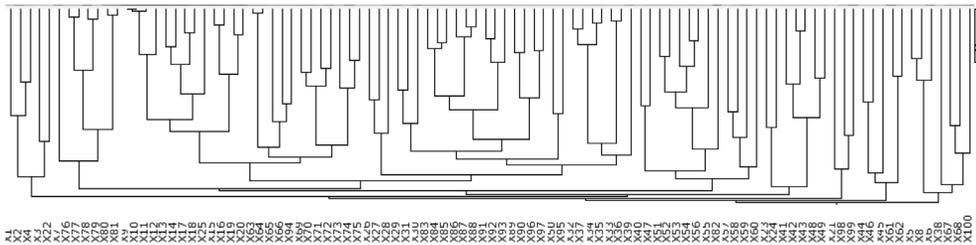


図6 変数のクラスター分析

(2) 誤分類数の検討

表3は、上から順に100問の10%点、50%点、90%点の合否判定の分析結果である。

10%の合否判定では、変数増加法は55変数、AICは24変数、Cp統計量は18変数を選んだ。モデル選択が18変数から55変数と大きく異なった。LDFは20変数から24変数まで誤分類数が0になった。2次判別関数は5変数以降で合格群の110例全てが誤判別された。このような場合、これまでの例では正則化法に切り替えた後に起こるが、正則化法に切り替わらないで誤判別された。ロジスティック回帰、SVM、改定IPLP-OLDFは8変数で線形分離可能である。2010年度は6変数であり、ほぼ同じ結果になった。

50%の合否判定では、変数増加法は25変数、AICは22変数、Cp統計量は21変数を選んだ。LDFは36変数で合否判定できなかった。2次判別関数は20変数以降で合格群の60例全てが誤判別された。ロジスティック回帰、SVM、改定IPLP-OLDFは少なくとも15変数で線形分離可能である。

90%の合否判定では、変数増加法は14変数、AICは11変数、Cp統計量は7変数を選んだ。LDFは38変数で合否判定できなかった。2次判別関数は4変数以降で35例が誤判別された。ロジスティック回帰は20変数で、SVMと改定IPLP-OLDFは29変数で線形分離可能であり、20変数で線形分離可能でなかった。

従来のモデル選択法は、スイス銀行紙幣データでは線形分離可能な変数より多くを選び、今回は線形分離可能なモデルよりも多くあるいは少ない変数を選んだことは問題であろう。すなわち、モデル選択が線形分離可能という事実を全く認識できないことが明らかである。

一方、10%点では最小の設問数が8変数、50%点では15変数、90%点では20変数と、合格水準が上がると合否判定に必要な設問数が増えていくことは合理的である。これは、線形分離可能な最小設問数が試験の難易度を表す指標として使えないかという仮説の妥当性を裏づけている。

表3 100問の分析

p	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	X17	156.0	184.3	9	9	9	9	0	9
2	X74	143.0	149.6	9	21	21	7	0	7
3	X82	132.0	124.2	8	8	8	6	0	5
4	X96	123.0	104.3	5	10	6	4	0	3
5	X9	116.0	90.6	6	110	6	4	0	3
6	X49	108.0	76.3	5	110	4	3	0	2
7	X13	102.0	66.4	3	110	1	1	0	1
8	X97	97.0	58.1	4	110	0	0	0	0
9	X77	94.0	53.0	2	110	0	0	0	0

10	X42	89.0	45.5	2	110	0
11	X26	86.0	41.2	3	110	0
12	X31	84.0	37.7	1	110	0
13	X20	82.0	34.5	1		
14	X89	79.0	30.5	1		
15	X90	74.0	25.8	1		
16	X64	78.0	21.9	1		
17	X48	69.0	20.5	1		
18	X87	68.0	18.8	1		
19	X86	66.0	14.3	1		
20	X100	63.0	13.3	0		
21	X69	62.0	12.2	0		
22	X24	62.0	10.7	0		
23	X91	61.0	9.7	0		
24	X25	60.0	9.5	0		
25	X7	60.0	9.2			
26	X99	60.0	9.6			
27	X79	60.0	9.9			
28	X63	60.0	9.3			
29	X78	60.0	8.8			
30	X71	60.0	9.1			
31	X50	60.0	9.7			
32	X15	60.0	9.9			
33	X54	60.0	9.8			
34	X46	61.0	10.2			
35	X95		11.0			
36	X5		11.8			
37	X6		10.2			
38	X83		10.9			
39	X22		11.6			
40	X76		12.3			
41	X73		13.3			
42	X8		14.4			
43	X93		15.3			
44	X40		16.2			
45	X35		17.3			
46	X32		17.5			
47	X88		18.1			
48	X18		18.2			
49	X98		19.0			
50	X21		19.8			
51	X36		20.3			

52	X12		21.0							
53	X53		222							
54	X23		233							
55	X92		244							
<hr/>										
1	X84	270	82.49	20	20	11				
2	X70	249	50.38	20	20	20				
3	X18	231	26.6	16	15	15				
4	X92	221	15.32	14	14	13				
5	X58	211	5.591	9	11	9				
6	X80	204	-1.17	11	8	5				
7	X56	197	-6.41	9	6	5				
8	X8	194	-9.33	7	6	5	5	0	4	
9	X28	191	-11.6	8	6	6	4	3	3	
10	X38	187	-13.9	6	5	4	3	4	2	
11	X83	185	-15	5	5	4	3	0	2	
12	X35	183	-16.2	4	4	1	1	0	1	
13	X24	180	-18	4	6	1	1	0	1	
14	X49	178	-18.4	3	5	1	1	0	1	
15	X94	177	-19	4	5	0	0	0	0	
16	X57	176	-19.1	4	6	0	0	0	0	
17	X52	175	-18.8	3	5	0				
18	X23	174	-19	4	4	0				
19	X26	173	-19	3	4	0				
20	X25	174	-18.3	2	60	0				
21	X91	174	-17.7	2	60	0				
22	X29	174	-17.2	2						
23	X81	174	-16.6	2						
24	X46	175	-15.7	2						
25	X20	176	-14.8	3						
26	X48	177	-13.8	3						
27	X59	178	-12.9	2						
28	X54	179	-11.7	2						
29	X5	181	-10.7	2						
30	X43	182	-9.45	2						
31	X88	184	-8.29	2						
32	X77	186	-7.19	2						
33	X76	184	-7.33	2						
34	X79	186	-6.23	2						
35	X14	188	-5.05	2						
36	X69	190	-3.88	2						
<hr/>										
1	X87	275	91.50	25	25	25				
2	X51	253	55.80	25	25	25				

3	X84	244	4273	20	21	20			
4	X16	234	3029	16	35	14			
5	X54	227	2123	14	35	13			
6	X34	221	1504	14	35	10			
7	X8	217	1025	12	35	10			
8	X73	212	5.479	9	35	6			
9	X47	208	1.945	7	35	6			
10	X76	205	-0.58	5	35	3			
11	X95	204	-1.61	3	35	2			
12	X14	202	-2.34	3	35	2			
13	X52	202	-2.91	3	35	1	3	0	2
14	X60	201	-3.29	4	35	1	2	0	2
15	X82	201	-3.38	5	35	1	2	0	2
16	X23	201	-3.38	5	35	1	2	0	2
17	X48	201	-3.11	4	35	1	2	0	2
18	X41	201	-3.15	3	35	1	2	0	2
19	X33	201	-2.89	3	35	1	2	0	2
20	X40	202	-2.63	5	35	0	1	0	1
21	X36	202	-2.15	2		0	1	0	1
22	X5	202	-2	3		0	1	0	1
23	X94		-2.11	1		0	1	0	1
24	X77		-2.09	2		0	1	0	1
25	X56		-2.41	3		0	1	0	1
26	X39		-2.34	1		0	1	0	1
27	X96		-2.39	2			1	0	1
28	X29		-2.16	2			1	0	1
29	X53		-2.05	2			0	0	0
30	X68		-1.61	2			0	0	0
31	X20		-0.83	3					
32	X26		-0.41	3					
33	X58		0.462	3					
34	X57		1.55	2					
35	X43		2.332	3					
36	X42		1.661	2					
37	X88		2.467	1					
38	X24		3.675	1					

3. 期末試験の分析

3.1 得点分布

図7は、得点分布である。10%点(43点), 50%点(60点), 90%点(80.8点)で合否判定す

る。中間試験は、それぞれ42点、60.5点、79点であり、期末試験の方が1点、-0.5点、1.8点高い。特に最高点は88点が99点と11点も高くなっている。

期末試験の試験範囲は半筋授業の影響を受けたので、講義資料を事前に公開したことが、成績の上昇につながったのかもしれない。



図7 得点分布

図8は、大問の得点分布である。S1(4件のデータによる相関と回帰の計算)は一般的に楽勝の設問であり90%点は最高得点の26点と同じであった。同様にS4(分割表の計算)は90%点が最高得点の5点と等しいが、S4はできる学生とできない学生を識別する設問と考えられる。

S6は難しい設問である。S2、S3とS5はバランスのとれた設問と考えられる。

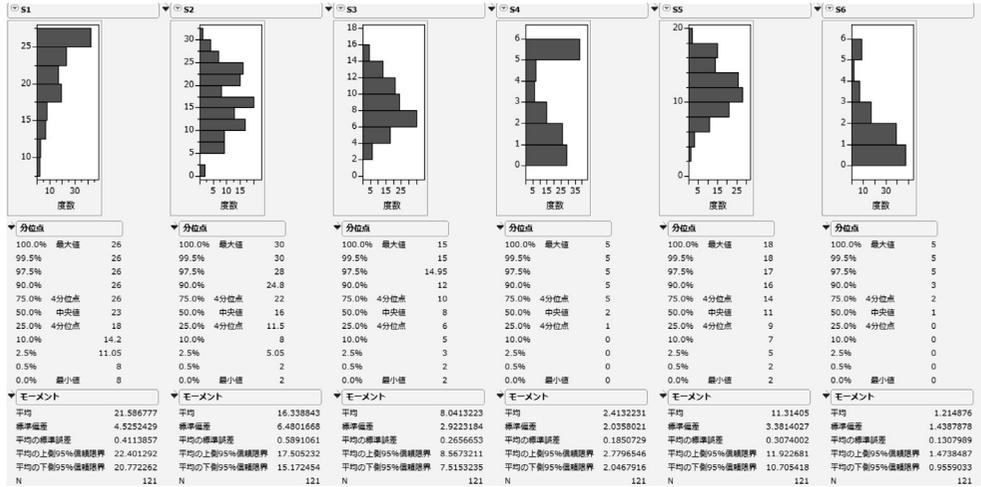


図8 大問の得点分布

3.2 大問の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

大問の主成分分析は、固有値が1以上は第1主成分だけであり累積寄与率は約44%である。

図9は因子負荷プロットである。

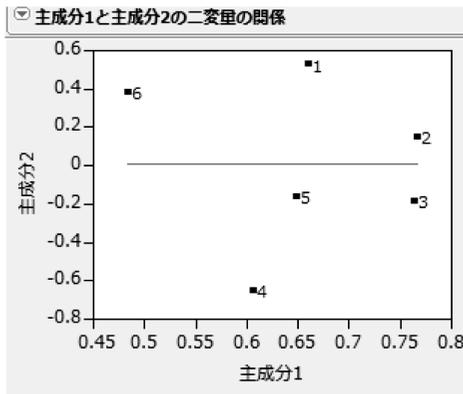


図9 大問の因子負荷プロット

図10は、変数のクラスター分析である。S1とS2がクラスターになりS5がその後クラスターになる。S3とS4もクラスターになり、これらがクラスター化される。最後にS6がクラスター化されるが、時間が足りなかったか難しいかのいずれかであろう。

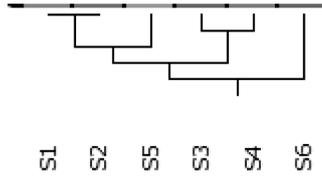


図10 クラスタ分析

(2) 誤分類数の検討

表4は、上から順に大問の10%点, 50%点, 90%点の合否判定の分析結果である。

10%の合否判定では、変数増加法は3変数、AICとCp統計量は2変数を選んだが、LDFと2次判別関数は6変数でも合否判定できない。ロジスティック回帰、SVMと改定IPLP-OLDFは4変数で線形分離可能である。ただし、ロジスティック回帰は推測が不安定である。すなわち、成績不振者の10%点を不合格とするのにS3とS6は必要ないことが分かる。

50%の合否判定では、変数増加法とAICは5変数、Cp統計量は6変数を選んだが、LDFと2次判別関数は6変数でも合否判定できない。ロジスティック回帰、SVMと改定IPLP-OLDFは5変数で線形分離可能である。ただし、ロジスティック回帰は推測が不安定である。S6が50%点の合否判定に不用なことが分かる。

90%の合否判定では、変数増加法は5変数、AICは4変数、Cp統計量は3変数を選んだが、LDFと2次判別関数は6変数でも合否判定できない。ロジスティック回帰、SVMと改定IPLP-OLDFは4変数で線形分離可能である。ただし、ロジスティック回帰は推測が不安定である。S1とS4が90%点の合否判定に不用なことが分かる。

表4 大問の分析

P	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	S1	2.8	6.0	22	22	28	7	2	8
2	S5	-1	2.1	16	13	14	5	0	4
3	S4	-0.8	2.3	16	12	8	5	0	3
4	S2	0.4	3.3	14	9	0	0	0	0
5	S3	2.4	5.1	13	7		0	0	0
6	S6	4.6	7.0	13	3		0	0	0
p	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	S2	84.6	33.6	77	17	17	17	0	17
2	S5	72.1	18.5	14	13	11	14	0	11
3	S3	64.8	10.4	11	11	7	8	0	6
4	S1	62.2	7.5	4	7	3	4	0	2

5	S4	60	5.2	5	3	0	0	0	0
6	S6	62	7.0	5	6		0	0	0
P	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	S2	25.1	40.2	25	19	19	7	2	8
2	S6	0.5	11.1	10	19	21	4	0	4
3	S5	-5.9	4.4	11	6	6	4	0	3
4	S3	-6.6	3.7	9	4	0	0	0	0
5	S4	-5	5.0	9	10		0	0	0
6	S1	-2.7	7.0	9	12		0	0	0

3.3 100問の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

図11は、主成分分析の結果である。X1からX3が全員正解であったので、これを省いた97問で主成分分析を行った。第70主成分までが固有値1以上のような。因子負荷量から、第1主成分との相関が0.5以下のものが多いことが分かる。スコアプロットから三角形のような2010年度とは異なった分布になった。

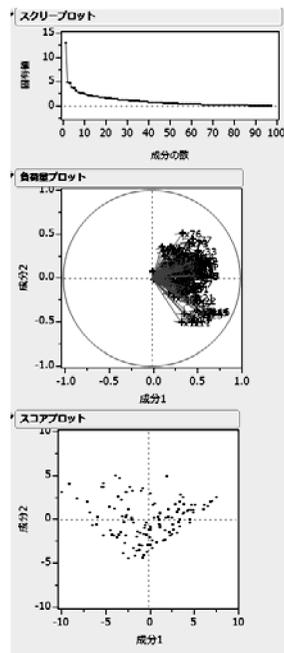


図11 主成分分析

(2) 誤分類数の検討

表5は、100問の誤分類数の検討である。

10%点の合否判定では、変数増加法は38変数、AICは16変数、Cp統計量は8変数を選んだ。LDFは30変数で合否判定できた。2次判別関数は、15変数で不合格群が全て合格群に誤分類された。ロジスティック回帰は12変数で合否判定できたが、収束計算が不安定である。SVMと改定IPLP-OLDFは8変数で合否判定できた。ロジスティック回帰は、8変数で線形分離可能でなかった。

50%点の合否判定では、変数増加法とAICは25変数、Cp統計量は21数を選んだ。LDFは25変数で合否判定できなかった。2次判別関数は、正則化法なしで18変数で不合格群が全て合格群に誤分類された。ロジスティック回帰とSVMと改定IPLP-OLDFは13変数で合否判定できた。

90%点の合否判定では、変数増加法は22変数、AICは10変数を選んだ。LDFは21変数で合否判定できたが22変数ではできなかった。2次判別関数は、7変数以降で合格群の全てが不合格群に誤分類された。ロジスティック回帰とSVMと改定IPLP-OLDFは8変数で合否判定できた。

表5 100問の誤分類数の検討

P	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP
1	x14	13.1	99.5	10	10	10			
2	x17	-7.3	64.7	15	15	15			
3	x8	-25.4	39.0	12	19	19	5	0	5
4	x45	-35.2	26.7	7	9	6	1	10	5
5	x86	-38.5	22.4	7	4	2	3	0	2
6	x83	-42.5	17.8	8	4	8	1	0	1
7	x81	-48.1	11.9	4	3	2	1	0	1
8	x31	-52.5	7.5	4	4	1	0	0	0
9	x25	-54.9	5.2	4	6	1	0	0	0
10	x41	-57.2	3.1	3	4	1	0	0	0
11	x58	-60.6	0.2	3	4	1	0	0	0
12	x12	-63.2	-1.9	2	4	0	0	0	0
13	x91	-68.0	-5.4	3	4				
14	x93	-79.3	-12.9	2	4				
15	x15	-80.8	-13.6	1	110				
16	x75	-81.0	-13.4	1					
17	x65	-80.9	-13.1	1					
18	x69	-81.4	-13.1	1					
19	x59		-13.1	1					
20	x84		-12.5	1					
21	x35		-12.1	1					

22	x46	-12.5	1							
23	x43	-12.5	1							
24	x29	-11.9	1							
25	x71	-11.4	1							
26	x57	-10.7	1							
27	x54	-9.9	1							
28	x99	-8.9	1							
29	x85	-7.8	1							
30	x5	-6.7	0							
31	x9	-6.3	0							
32	x79	-5.6	0							
33	x89	-4.6	0							
34	x90	-3.7	0							
35	x53	-2.8	0							
36	x60	-1.5	0							
37	x36	-0.4	0							
38	x32	0.8	0							
p	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP	
1	x32	142.9	271.5	30	30	30				
2	x15	117.3	194.0	22	22	22				
3	x62	101.2	152.8	23	22	22				
4	x77	92.3	131.3	19	20	19				
5	x33	83.8	112.8	16	19	15				
6	x52	76.1	97.2	12	16	12				
7	x79	69	83.8	12	12	10				
8	x83	62.6	72.6	9	8	6				
9	x34	58.3	65.1	9	8	7	5	5	4	
10	x89	53.4	57.3	9	5	6	9	0	4	
11	x12	49.9	51.7	8	7	5	4	2	3	
12	x46	47.2	47.4	6	7	4	4	0	2	
13	x30	44.5	43.3	6	7	0	0	0	0	
14	x31	41.6	39.2	6	6					
15	x39	38.7	35.3	4	4					
16	x95	37.8	33.6	6	2					
17	x51	36.7	31.8	6	2					
18	x9	34.5	28.9	4	62					
19	x56	32.7	26.7	3	62					
20	x88	30	23.7	4						正則化なしで誤判別
21	x74	29.2	22.5	3						
22	x36	27.6	20.7	3						
23	x85	27.4	20.1	3						
24	x14	27.3	19.5	3						

25	x10	26.7	18.6	3						
p	Var.	AIC	Cp	LDf	QD	Logi	SVM	ZERO	IPLP	
1	x100	36.6	-2.5	23	23	23				
2	x67	17.9	-18.6	40	40	40				
3	x44	2.3	-29.8	13	13	13				
4	x37	-7.5	-35.6	8	9	9	3	0	3	
5	x28	-12.8	-38.2	7	9	2	1	0	1	
6	x97	-17.8	-40.4	5	6	2	1	0	1	
7	x49	-21.8	-41.8	3	12	1	1	0	1	
8	x95	-23.8	-42.0	2	12	0	0	0	0	
9	x92	-26.0	-42.3	3	12					
10	x39	-27.8	-42.3	3						
11	x19	-24.2	-42.1	3						
12	x70	-30.1	-41.7	2						
13	x62	-31.3	-41.3	3						
14	x98	-33.5	-41.4	3						
15	x56	-33.6	-40.5	2						
16	x40	-33.5	-39.6	2						
17	x94	-33.0	-38.5	2						
18	x30	-32.3	-37.3	1						
19	x78	-31.9	-36.2	1						
20	x22	-30.6	-34.8	1						
21	x85	-29.4	-33.5	0						
22	x21	-28.2	-32.2	1						

4. まとめ

表6は、2010年と2011年の得点の比較である。中間では、各合否水準で3点から6点成績が下がったのは、問題を5点ほど難しくしたためである。しかし期末試験では、合否判定の10%点で3.6点、最高点で8点も上昇した。

2010年度は、期末は中間より10%点、50%点、90%点、最高点で8.6点、6点、0点、2点下がっている。しかし2011年度は、1点、-0.5点、1.8点、11点得点が上がっている。

2010年度までは、テキストは紹介はすれ積極的に進めてこなかった。しかし2011年度は、半筋授業のため、「テキストあるいはPower Pointの資料で事前に予習し、授業で理解し、その日のうちに復習することを強く勧めた」。また、8回目以降の授業は、板書すると、手に持ったマイクがぶれて声が聞きにくいという指摘と文字が読みにくいということで、授業の講義内容を事前にIt'sClassにUPした。学生の中には印刷し、講義ノートを取らずにそこへメモを書き込んでいるものも増えたことが好成績の結果になったのであろう。

たったこれだけのことに気づくのが遅すぎたようである。

表6 2010年と2011年の比較

		2010	2011	差	次元
中間	10%点	48.0	42.0	6.0	8
	50%点	66.0	60.5	5.5	15
	90%点	82.0	79.0	3.0	29
	100%点	93.0	88.0	5.0	
期末	10%点	39.4	43.0	-3.6	8
	50%点	60.0	60.0	0.0	13
	90%点	82.0	80.8	1.2	8
	100%点	91.0	99.0	-8.0	
差	10%点	8.6	-1.0		
	50%点	6.0	0.5		
	90%点	0.0	-1.8		
	100%点	2.0	-11.0		

(成蹊大学経済学部教授)

文献

- [1] 大倉征幸, 鎌倉稔成 (2007). 精確ロジスティック回帰の近似推定. 応用統計学, 36 (2&3), 87-98.
- [2] 新村秀一 (2004). JMP活用統計学とおき勉強法. 講談社.
- [3] —— (2007). 数理計画法による判別分析の10年. 計算機統計学, 20 (1/2), 59-94.
- [4] —— (2007). JMPによる統計レポート作成法. 丸善.
- [5] —— (2007). ExcelとLINGOで学ぶ数理計画法. 丸善.
- [6] —— (2010). 最適線形判別関数. 日科技連出版社.
- [7] —— (2010). マークシート試験によるFDの一提案. 成蹊大学一般研究報告, 44/4, 1-26.
- [8] —— (2010). 試験の合否判定データの最適線形判別関数による分析. 成蹊大学一般研究報告, 44/5, 1-44.
- [9] —— (2010). Fisherの判別分析を越えて. 成蹊大学経済論集, 41-1, 63-101.
- [10] —— (2011). 数理計画法による問題解決法. 日科技連出版社.
- [11] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. Biometrika, 80, 27-38.
- [12] Sall, J.P., Creighton, L. & Lehman, A. (2004). JMPを用いた統計およびデータ分析入門 (第3版). SAS Institute Japan (株). [新村秀一監修]
- [13] Schrage, L. (1981). LINDO - An Optimization Modeling System -. The Scientific Press. [新村秀

一・高森寛(1992) 実践数理計画法.朝倉書店

[14] Vapnik, V. (1995). The Nature of Statistical Learning Theory, Springer-Verlag.

付録 2010年度の統計入門の分析

1. 初めに

2011年度の統計入門との比較を行うため、同じ分析方法で出力して形式をそろえることにした。

2. 中間試験の分析結果

2.1 総合得点と大問の分布

図1は、中間試験の得点分布の結果である。2011年度の合否判定は、10%点(42点)、50%点(60.5点)、90%点(79点)、100%点(88点)であった。2010年度は、120人が受験し48点、66点、82点、93点である。2011年度は、6点、5.5点、3点、5点下がっている。これは、問題を5点分ほど難しくしたためである。難しくしたことで計算時間がかかるため、その影響で10点ほど下げることが狙った。

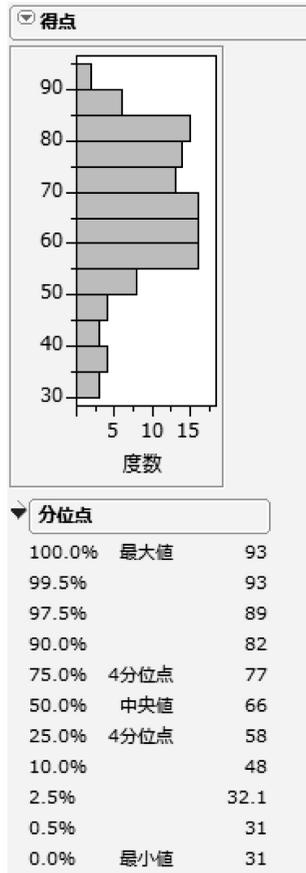


図1 中間試験の得点分布

図2は、大問9問の得点分布である。2010年度は、最高得点と90%点が等しい楽勝設問が、設問5と8を除く6個であった。しかし、2011年度は大問1と大問6(S6)が楽勝でなくなった。

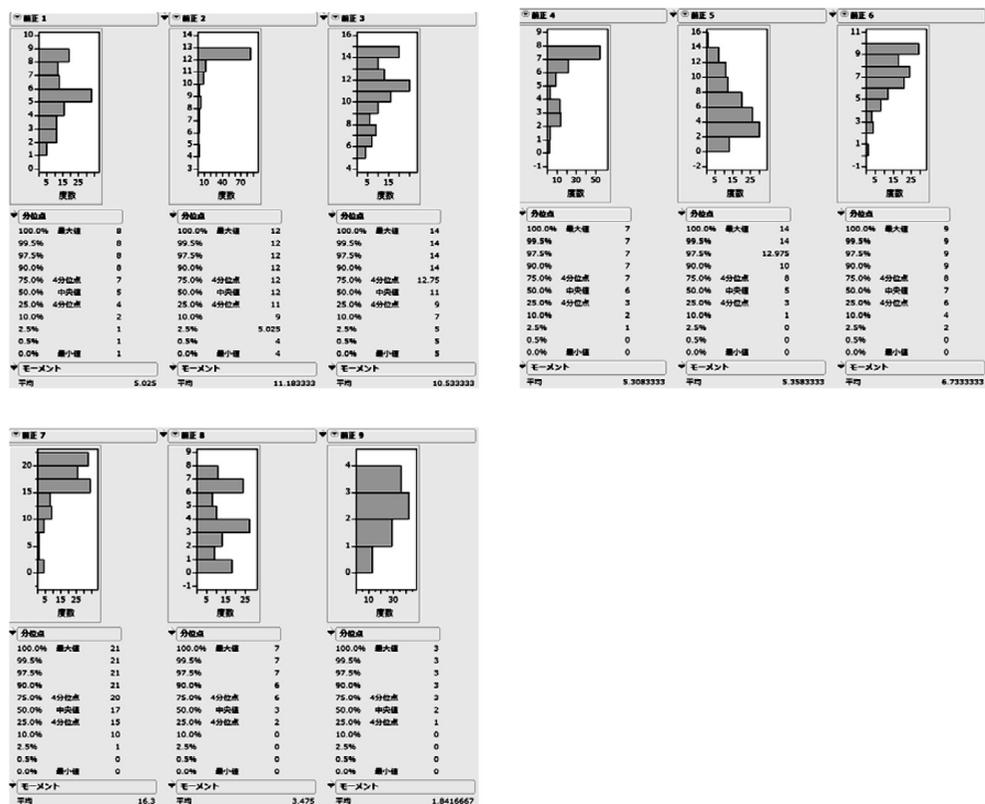


図2 大問9問の得点分布

2.2 大問9問の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

第2主成分までの固有値が1以上で、累積寄与率は53.49である。表1は第2主成分までの因子負荷量であり、図3は因子負荷プロットである。

もし主成分1の正が高得点者、負が低得点者を表すと考えれば、2011年度は $S1 < S9 < S2, S4, S5 < S6 < S3, S8 < S7$ の順に高得点者に対応しているが、2010年度は $S1 < S2 < S4, S6, S9 < S5 < S3 < S8, S7$ になる。

表1 因子負荷量

	C1	C2
S1	0.459	0.031
S2	0.485	0.706
S3	0.693	0.324
S4	0.577	0.447
S5	0.660	0.034
S6	0.589	-0.405
S7	0.745	-0.245
S8	0.745	-0.210
S9	0.607	-0.469

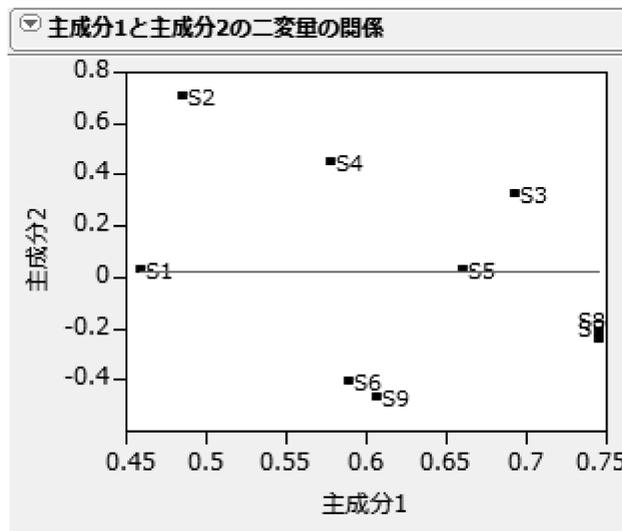


図3 主成分分析の固有値と因子負荷量のプロット

図4はクラスター分析の結果である。(S1, ((S2, S3), S4), (S6, ((S7, S8), S9))) というようにクラスター化されている。

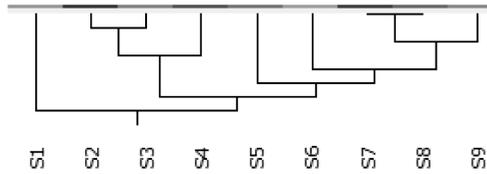


図4 クラスタ分析

(2) 誤分類数の検討

表2は、上から順に10%点, 50%点, 90%点の合否判定の分析結果である。pは変数増加法で選ばれた説明変数の個数を表す。

表2 大問の分析 (SVMの+表記は、後ろの個数は判別超平面上の個数を示す)

p	Var.	AIC	Cp	LDf	QD	Logi	IP	SVM	決定木
1	S7	162.70	42.47	14	14	8	7	7	11
2	S4	138.50	13.16	8	7	1	1	2	3
3	S2	130.00	4.14	7	5	1	1	1	3
4	S6	128.10	2.44	6	4	0	0	1	3
5	S9	128.20	2.43	5	5	0	0	0	
6	S3	130.20	4.15	7	3	0	0	0	
7	S8	132.40	6.06	7	1	0	0	0	
8	S1	134.70	8.00	7	2	0	0	0	
9	S5	137.20	10.00	7	0	0	0	0	
1	S8	289.20	88.81	28	28	28	28	23+10	20
2	S3	256.80	39.68	16	17	15	15	16	19
3	S5	240.00	19.18	11	13	9	9	12	19
4	S7	234.60	13.12	9	9	7	5	9	16
5	S6	231.40	9.64	7	5	5	3	6	10
6	S1	230.40	8.45	7	5	4	2	4	10
7	S9	229.70	7.59	6	5	5	2	4	10
8	S4	230.80	8.38	7	3	1	1	2	9
9	S2	232.80	10.00	7	6	0	0	0	9
1	S5	199.1	17.7	24	2	27	10	13	27
2	S8	188.9	6.7	19	16	14	6	8	12
3	S3	185.1	2.8	20	7	4	3	5	5
4	S2	184.5	2.1	18	7	4	3	5	5
5	S7	185.8	3.4	20	5	2	1	2	5
6	S9	187.5	4.8	18	4	1	1	1	

7	S6	189.5	6.4	17	2	0	0	0
8	S1	191.6	8.2	18	2		0	0
9	S4	192.9	10.0	16	2		0	0

2.3 小問100個の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

2010年度は、スコアプロットから、成績優秀者を扇の要とし、据広がりになっている。すなわち、成績の悪い学生が大きくばらついている。2011年は、主として1象限と4象限にばらついている。

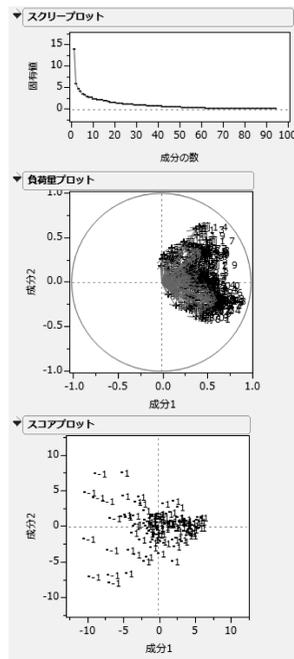


図5 小問100個の因子負荷プロット

(2) 誤分類数の検討

表3は、上から順に100問の10%点、50%点、90%点の合否判定の分析結果である。10%点の変数増加法は30変数を選んだ。変数減少法は61個の変数が掃き出され39変数を選んだ。AICは16変数、Cp統計量は4変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM = 0は6変数である。50%点の変数増加法は52変数を選んだ。変数減少法は39個の変数が掃き出され61変数を選んだ。AICは19変数、Cp統計量は25変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM = 0は12変数である。90%

点の変数増加法は26変数を選んだ。変数減少法は60個の変数が掃き出され40変数を選んだ。AICは13変数, Cp統計量は5変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM = 0は13変数である。

表3 100問の分析

step	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	IPLP	SVM	決定木
1	X36	178	91.4	11	11	11	11	11	11
2	X82	147	43.4	19	19	19	7	7	5
3	X25	129.1	21.1	3	19	13	3	3	4
4	X96	111.2	<u>2.6</u>	5	5	4	3	3	4
5	X17	106.2	-2.1	7	9	3	2	2	
6	X61	100.7	-6.7	2	1	0	0	0	
7	X38	96.7	-9.8	2	0				
8	X37	90.8	-14.1	0	0				
9	X1	86.1	-17.1	0					
10	X59	81.6	-19.8	0					
11	X3	78.2	-21.6	0					
12	X65	77	-21.9	0					
13	X72	75.9	-22.1	0					
14	X99	73.7	-22.9	0					
15	X53	72.4	-23.1	0					
16	X42	<u>71.2</u>	-23.2	0					
17	X43	71.5	-22.5	0					
18	X97	71.7	-21.8	0					
19	X32		-20.9	0					
20	X31		-21.3	0					
21	X81		-21.0	0					
22	X35		-20.5	0					
23	X21		-19.8	0					
24	X67		-19.0	0					
25	X16		-18.3	0					
26	X20		-17.6	0					
27	X62		-16.6	0					
28	X69		-15.6	0					
29	X26		-14.6	0					
30	<u>X41</u>		-13.5	0					
1	X93	302.5	246.4	28	28	28	28	61	28
2	X43	275.2	169.6	25	28	25	25	61	25
3	X29	255.9	125.1	15	15	15	15	15	16

4	X68	243.3	99.6	10	11	10	10	10	16
5	X97	234.9	83.8	10	13	10	10	10	13
6	X99	226.4	69.3	9	12	9	9	10	13
7	X84	221.4	60.9	7	7	6	5	7	13
8	X2	217.6	54.6	5	6	4	5	5	13
9	X75	215.6	51.0	5	8	4	5	5	10
10	X31	212.8	46.4	7	6	4	3	5	10
11	X38	212.2	44.7	4	5	1	1	1	10
12	X22	212	43.5	2	4	0	0	0	
13	X67	211.9	42.4	1	61				
14	X34	211.4	40.9	2	61				
15	X21	210.5	39.1	1	61				
16	X58	209.2	36.8	1					
17	X91	208.7	35.4	0					
18	X33	208.4	34.3	0					
19	X76	<u>208.2</u>	33.4	0					
20	X17	208.7	32.9	1					
21	X13	207.9	31.4	1					
22	X45		29.7	0					
23	X47		27.8	1					
24	X27		27.0	0					
25	X24		<u>26.2</u>	0					
26	X77		25.6	0					
27	X41		25.0	0					
28	X50		24.5	0					
29	X14		24.3	0					
30	X73		23.7	0					
31	X46		22.9	0					
32	X60		23.2	0					
33	X56		23.2	0					
34	X96		23.2	0					
35	X88		23.6	0					
36	X61		23.9	0					
37	X30		23.8	0					
38	X98		24.0	0					
39	X79		24.5	0					
40	X26		24.6	0					
41	X4		25.2	0					

42	X86		25.8	0				
43	X42		26.0	0				
44	X48		25.3	0				
45	X57		26.2	0				
46	X54		26.6	0				
47	X62		27.5	0				
48	X63		28.2	0				
49	X32		29.1	0				
50	X52		30.1	0				
51	X1		31.1	0				
52	X53		31.9	0				
<hr/>								
1	X57	208.2	55.7	19	19	19		43
2	X95	191.4	32.6	31	31	31		18
3	X32	182.3	21.4	11	11	11		18
4	X50	172.7	10.9	11	11	11		6
5	X55	168.1	<u>6.2</u>	9	8	8		9
6	X59	163.9	2.1	8	7	5		
7	X58	159.2	-2.0	9	7	4		
8	X88	153.3	-6.8	8	13	3		
9	X65	151.9	-7.8	7	正則化	3	3	4
10	X17	151.2	-8.2	6		2	2	4
11	X1	150.8	-8.4	6		1	1	4
12	X3	150.7	-8.3	6		1	1	4
13	X63	<u>150.2</u>	-8.5	4		0	0	4
14	X8	150.8	-7.9	5				
15	X79		-7.4	4				
16	X27		-7.5	3				
17	X83		-7.3	2				
18	X53		-7.1	1				
19	X43		-7.1	1				
20	X6		-7.1	1				
21	X5		-7.7	2				
22	X26		-7.9	2				
23	X13		-7.3	1				
24	X34		-6.5	2				
25	X33		-6.2	1				
26	<u>X52</u>		-5.2	1				

3. 期末試験の分析

3.1 得点分布

図6は、得点分布である。

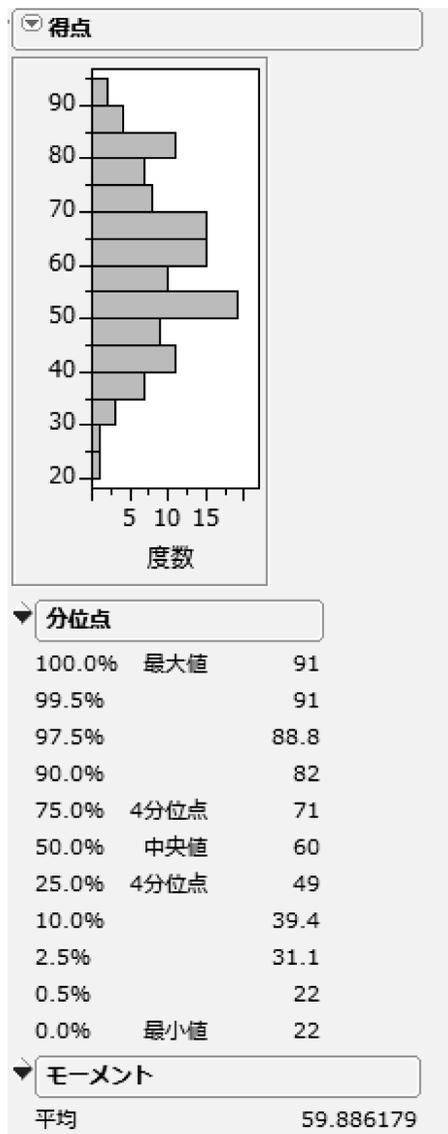


図6 得点分布

2010年度の期末試験は123名が受験し、10%点(39.4点)、50%点(60点)、90%点(82点)、最高点は91点である。2010年は、2011年に比べて3.6点、0点、-1.2点、8点低くなっている。これは驚く点で、半減授業の影響を受けた2011年の期末試験の成績が良い点である。

図7は、大問の得点分布である。最高得点と90%点が等しい楽勝問題はS1とS4であるが、S4はできる学生とできない学生が2峰性になっている。

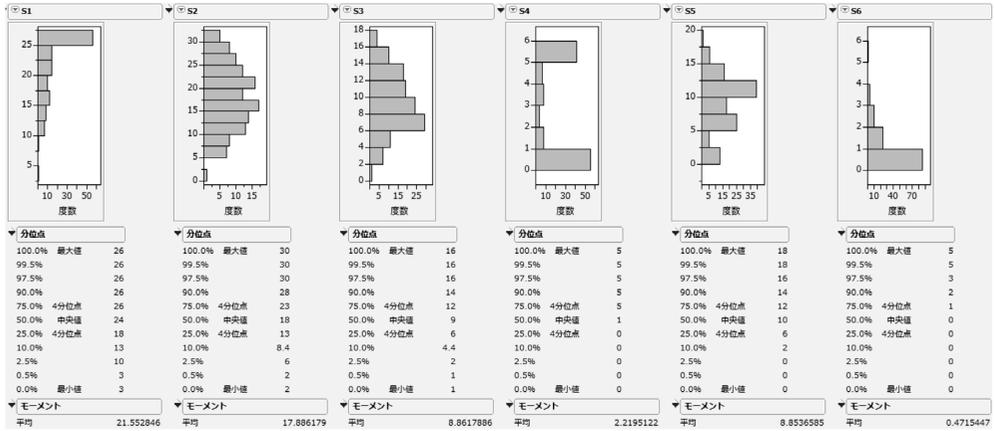


図7 大問の得点分布

3.2 大問の分析

(1) 主成分分析とクラスター分析

大問の主成分分析は、固有値が1以上は第2主成分までで累積寄与率は60.4%である。表4は因子負荷量である。S6以外は第1主成分との相関が0.45以上である。S5とS6が第2主成分と0.58以上の正の相関があり、S1は-0.49以下の負の相関がある。

表4 因子負荷量

	C1	C2
S1	0.61	-0.49
S2	0.78	-0.25
S3	0.80	0.01
S4	0.74	0.11
S5	0.45	0.58
S6	0.19	0.75

図8は因子負荷プロットである。

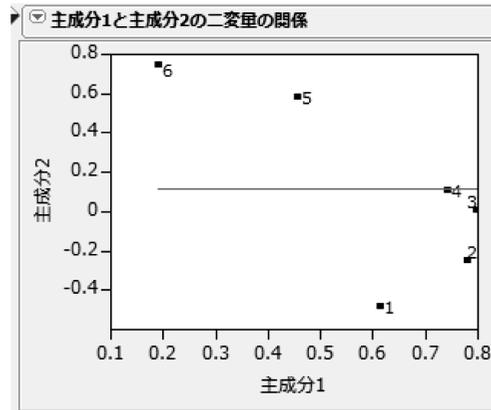


図8 因子負荷プロット

図9はスコアプロットである。4象限にまんべんにばらついている。

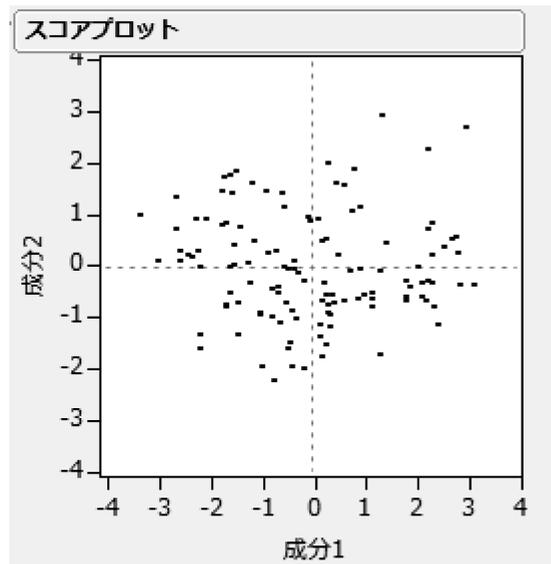


図9 スコアプロット

図10は、変数のクラスター分析である。S3とS4がクラスターになり、S1とS2のクラスターと融合し、最後にS5とS6のクラスターと一つになっている。すなわち、(((S3, S4), (S1, S2)), (S5, S6))の構造をもっている。

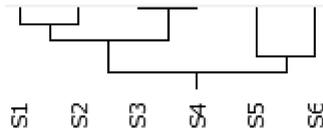


図10 クラスタ分析

(2) 誤分類数の検討

表5は、上から順に100問の10%点, 50%点, 90%点の合否判定の分析結果である。

表5 大問の分析

p	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	IPLP
1	S1	185.62	11.50	21	21	27	28	23
2	S2	180.09	5.61	16	17	7	13	10
3	S3	179.01	<u>6.00</u>	16	10	7	12	8
4	<u>S6</u>	<u>178.73</u>	4.02	15	9	2	10	7
5	S5	180.27	5.34	14	6	0	4	1
6	S4	182.20	7.00	16	6	0	0	0
1	S2	258.48	56.36	19	19	17	14+8	17
2	S5	241.29	32.86	14	16	14	13+1	13
3	S1	219.26	8.10	8	10	7	9	6
4	<u>S3</u>	<u>216.69</u>	5.40	8	8	2	5	2
5	S4	217.60	6.12	4	6	0	0	0
6	S6	218.71	<u>7.00</u>	5	7	0	0	0
1	S3	204.11	22.28	28	23	28	7+7	10
2	S2	194.25	11.15	21	16	11	6	4
3	S5	187.74	4.41	18	9	2	1+1	1
4	<u>S4</u>	<u>187.69</u>	<u>4.24</u>	15	13	2	1+1	1
5	S6	188.96	5.31	13	13	1	1	1
6	S1	190.92	7.00	12	13	0	0	0

3.3 100問の分析

(1) 主成分分析とクラスタ分析

図11は、主成分分析である。クラスタ分析は省く。

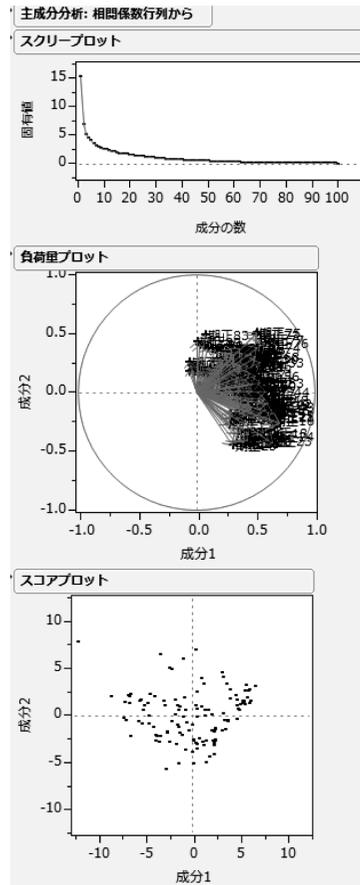


図11 主成分分析

(2) 誤分類数の検討

表6は、100問の誤分類数の検討である。10%点は変数増加法で48変数、変数減少法は46個掃き出し54変数を選んだ。AICは21変数、Cp統計量は31変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM=0は12変数である。50%点は変数増加法で28変数、変数減少法は66個掃き出し34変数を選んだ。AICは19変数、Cp統計量は5変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM=0は32変数である。90%点は変数増加法で20変数、変数減少法は71個掃き出し29変数を選んだ。AICは15変数、Cp統計量は5変数を選んだ。改定IPLP-OLDFのNM=0は12変数である。

表6 100問の誤分類数の検討

step	Var.	AIC	Cp	LDF	QD	Logi	SVM	IPLP	決定木
1	X18	196.8	234.52	15	15	15	12	12	39
2	X60	175.3	174.85	20	20	20	9	9	10
3	X8	167.0	152.94	16	23	20	6+5	8	10
4	X40	160.8	137.28	15	20	25	7	7	6
5	X45	153.8	121.17	11	18	16	6	6	6
6	X16	151.2	113.97	10	13	7	5	5	
7	X53	149.2	108.41	9	8	7	3	3	
8	X15	146.2	101.13	9	4	5	2	2	
9	X79	143.0	94.01	7	2	1	1	1	
10	X4	139.2	86.23	5	2	1	1	1	
11	X1	134.8	77.94	5	111	1	1	1	
12	X2	132.6	73.22	5	111	0	0	0	
13	X44	130.2	68.54	3			0	0	
14	X54	127.2	63.15	2					
15	X72	125.2	59.33	2					
16	X7	123.8	56.29	1					
17	X9	119.1	49.66	1					
18	X70	118.1	47.50	1					
19	X77	116.5	44.74	1					
20	X42	115.1	42.22	2					
21	X90	113.6	39.83	2					
22	X96	113.9	38.72	2					
23	X55	114.0	38.17	1					
24	X34		37.60	1					
25	X35		34.41	0					
26	X33		32.51						
27	X80		31.21						
28	X99		30.72						
29	X92		30.13						
30	X32		29.58						
31	X75		29.52						
32	X41		29.88						
33	X10		30.18						
34	X6		26.92						
35	X71		27.40						

36	X62		27.73					
37	X87		28.06					
38	X89		28.43					
39	X57		29.11					
40	X49		29.47					
41	X23		29.69					
42	X38		30.22					
43	X66		30.68					
44	X65		29.95					
45	X39		30.55					
46	X58		30.68					
47	X28		30.77					
48	X29	31.265	49.00					
<hr/>								
1	X22	303.80	92.721	26	26	26	26	26
2	X75	284.40	60.676	26	26	26	26	26
3	X92	269.10	39.151	19	19	19	19	26
4	X15	251.90	18.666	18	17	18	17	21
5	X48	238.70	5.122	13	12	12	11	13
6	X84	230.70	-2.234	12	11	10	5	13
7	X30	222.00	-9.365	10	9	9	4	13
8	X100	216.10	-13.714	9	8	5	4	13
9	X99	212.50	-16.117	10	12	6	4	10
10	X63	209.90	-17.62	6	10	4	3	10
11	X90	207.50	-18.848	6	9	1	1	
12	X19	203.50	-21.021	4	4	1	1	
13	X14	198.30	-23.701	3	4	1	1	
14	X41	194.70	-25.235	3	3	1	1	
15	X54	192.90	-25.634	3	3	1	1	
16	X38	192.00	-25.549	3	4	1	1	
17	X2	190.00	-25.992	2	4	1	1	
18	X8	189.10	-25.83	3	6	1	1	
19	X4	187.90	-25.771	2	62	1	1	
20	X50	188.30	-24.951	3	62	1	1	
21	X44	189.10	-23.979	2	62	1	1	1
22	X57		-23.008	2	62	1	1	1
23	X96		-21.847	2	62	1	1	1
24	X87		-20.736	2	62	1	1	1
25	X21		-19.508	2	62	1	1	1

26	X35	-18.263	2	62	1	1	1
27	X34	-17.588	2	62	1	1	1
28	X31	-16.722	1	62	1	1	1
29	X29	-15.269	1	62	1	1	1
30	X33	-14.015	1	62	1	1	1
31	X10	-12.609	1	62	1	1	1
32	X62	-11.325	1	62	0	0	0
33	X1	-10.15	1				
34	X13	-8.662	1				
35	X98	-7.281	1				
36	X59	-5.726	1				
37	X91	-4.255	1				
38	X9	-2.809	1				
39	X7	-1.268	1				
40	X55	0.257	1				
41	X47	1.76	1				
42	X53	3.178	2				
43	X66	4.466	2				
44	X61	6.012	2				
45	X37	7.535	2				
46	X64	9.09	1				
47	X23	10.634	1				
48	X72	12.102	1				
49	X67	13.52	1				
50	X36	15.061	1				
51	X88	16.661	1				
52	X60	18.257	0				
53	X81	19.864					

1	X68	209.3	36.9	29	29	29			
2	X71	197.5	22.1	14	13	14			
3	X76	189.8	13.4	26	13	15			
4	X55	184.9	8.2	13	13	10			
5	X82	180.2	3.5	14	13	8			
6	X37	176.2	-0.2	10	13	4			
7	X95	173.1	-2.8	9	13	5			
8	X28	170.2	-5.3	10	13	5	3	3	3
9	X89	167.8	-7.1	7	13	3	3	3	2

10	X93	166	-8.3	5	13	2	3	3	1
11	X34	164	-9.6	6	13	1	1	1	0
12	X70	163.2	-10.1	4	13	0	0	0	0
13	X63	162.9	-10.2	4	13				
14	X42	162.4	-10.2	4	13				
15	X90	161.4	-10.7	5	13				
16	X11	162.1	-10.0	4	13				
17	X56		-9.6	3	13				
18	X18		-9.1	3	13				
19	X85		-8.1	3	13				
20	X84		-7.9	2	13				
