

最適線形判別関数の応用 (3)

－2010年から2012年の統計入門の総括－

新 村 秀 一

1. はじめに

2010年度から成蹊大学経済学部1年次生を対象にした統計入門（1年次生必修）も3年間を迎えた。2010年度は手探りの状態であった。基礎演習担当の2名の女性教員から、大学に入って統計という得体のしれない理数系科目にパニックに陥った女子学生数名が、勉強法の相談にきたことの連絡を受けた。主な不安は、高校の授業のように、練習問題がないことらしい。授業中に何度も、「統計は統計量の計算に習熟することではなく、その意味を理解することである」と説明したが、計算問題をくださいと直接言いにくる学生もいた。指導教員には、「授業で講義したことを中間試験でそのまま出題します。中間試験でそれが分かれば、不安も解消されるでしょう」と回答した。しかし、2011年以降はパニックに陥る学生が出ていないのは、先輩からの情報で状況が理解できたためと考えられる。

2011年度は、授業の途中から3.11の影響で、半筋授業になった。中間試験の範囲は1回の削減であるが、期末試験の範囲は8回から5回と大幅に削減された。授業内容の削減も考えたが、前年度以上に講義内容の詳細を教材提示のWebにアップロードしたことと、毎回予習の徹底を指導した。その結果、2010年度より良い成果を得た。しかし、筆者の基礎演習（統計入門の次の時限に実施）の受講生から、講義が厳しすぎるという悪評が多いという情報を得た。

2012年は2年間の試験成果を見直し、間違いやすい点の説明の改善を行ったので、3年間で成績が連続して向上することを中間試験実施前まで期待した。しかし中間試験以降、欠席者が増大した。過去2年間は、中間試験の翌週は受講生130人前後に対して40人ぐらいに欠席者が急増したが、その後は持ち直した。今年度は、40人が週を追うにつれ増えて最終日には60人ぐらいが欠席するようになった。これは、受講生の規模に合わせた教室での講義であり、ほぼ目視で確認している数字である。出席している受講生には、今年度は過去最悪の結果になり、場合によって出席者と受講生の間で得点分布が2峰性になるかもしれないとってきた。

2011年度までは、中間試験直後の欠席者の増加は、試験成績の公表により、成績の悪い学生が就学をあきらめたのが原因でないかと考えていた。あるいは中間試験を受けて、統計入門が意外とやさしいと間違えて判断したことも考えられる。授業当初から学生には、「中間試

験は1変数の基本統計量, 期末試験はそれを応用した相関と単回帰分析に加えて分割表と範囲が広い」と講義でアナウンスしているにもかかわらず, 意外と中間の成績が良かったので欠席しても大丈夫と考える学生が何らかの理由で増えことが理由の一つとも考えられる。

本研究では, この点に注目して分析することにした。また3年間の試験の成績の総合的な分析を行う。

2. 統計入門の概略と受講生の得点の分析

2.1 授業の概要

授業の目的は, 統計の入門科目として基本統計量, 相関, 単回帰, 分割表を教えることを中心としている。テキストは [1] を用いた。本書は, 第1部では $(x,y) = (0,1), (1,1), (1,3), (2,3)$ という2変数*4件の簡単なデータで, 上記の統計量を説明している。第2部では「学生の成績データ」を用いて, JMPの出力結果を用いて統計量の意味を説明している。用いているデータは, 40人の学生の成績, 勉強時間などの7変数である。ただし相関と単回帰分析では手計算で統計量を説明した後, Excelで相関係数と回帰分析を計算する汎用シートの作成法を教え, Anscombe [2] のデータを用いた宿題を課している。分割表は手計算の後, 通常の独立性の検定に加えて, Fisherの直接確率¹によるp値の計算方法も説明している [3]。推測統計学は高校数学でも教えられているにもかかわらず, 文科系の学生に教えることは難しいと考えている統計の教員が多い。Fisherの直接確率は, 唯一推測統計学の考え方を具体的に教えることができるので, 入門科目として取り入れる内容であると考えている。また中学校の数学には, 四分位点や箱ひげ図が取り上げられるので, 大学の統計教育はそれを反映していく必要がある。

表1は, 2010年と2011年度の講義内容の比較である。2010年度(2012年度も同じ)の授業内容は中間試験を含め7週と期末試験の範囲は8週の配分で考えた。2011年度は, 授業開始の5週目に電力節減のため, 15週を11週にする半ば授業が決定された。このため, 中間試験の範囲を1週間短縮して6週, 期末試験の範囲を3週間短縮して5週にした。中間試験は, 授業が終わった6週目でなく7週目に実施して, 1週間余裕を持たせることで試験勉強に配慮した。期末試験は, 相関係数を2週, 単回帰分析と分割表を各1週で教えることにした。

¹ 数学ソフトSpeakeasyで2*2の分割表の実度数a,b,c,dをプログラムExact(a,b,c,d)で与えることで, 直接確率を計算するプログラムも公開した [3]。そして, 確率分布のヒストグラムを作成する宿題を課した。

表1 2010年(2012年度)と2011年度の講義内容の比較

週	2010年(2012年度)	2011年
1	PowerPointで概論	同左
2	最頻値, 中央値, 平均値	同左
3	範囲, 四分位範囲, SD, CV	同左
4	学生データの解釈	同左
5	正規分布	同左
6	自由度, SE, t分布	相関係数
7	中間試験*	中間試験*
8	相関係数	9回目
9	Excelで相関の計算	10回目
10	単回帰分析	12回目
11	単回帰分析	期末試験*
12	分割表と独立性の検定	
13	分割表と独立性の検定	
14	まとめ	
15	期末試験*	

* 授業内試験のため、配布と回収を1人で行っているため50分で実施。

試験は10択²100問のマークセンス試験である。入門科目であるため、教えた内容をまんべんなく出題していて、設問内容に大きな変更はない。ただし、統計量の計算に用いるデータは毎回変えている。当初、試験内容が知れ渡り、平均点の上昇により大幅な見直しを毎年行う必要があるかもしれないと考えたが、今のところ来年も継続できる。実際の評価は、受験者上位から15%をS、30%をA、30%をB、15%をC、10%をF、未受験者をFの5段階で評価している。

中間試験と期末試験の100問の小問を説明変数として、判別分析の可否判定の問題点を検討する³。また表2のように4個の大問の得点を用いて、大問の可否判定の問題点も検討する。可否判定の検討には、得点分布の10%点、50%点、90%点の3水準で検討する。10%点は実際の可否判定基準であり、50%点は受講生の可否が2分され判別超平面の近辺に受講生が一番多い試験であり、90%点は資格試験のような難易度の高い試験を想定している。

² 10択にすると難しい設問では無回答が増える。今後、適切な選択肢数を模索する必要がある。

³ 合格最低点を50点とすると、 $f(x) = \sum_{i=1}^{100} x_i - 50$ という判別関数で可否判定できるが、従来の判別関数は誤分類数が0にならない。すなわち可否判定できない。

表2 4個の大問

大問	中間試験			期末試験		
	内容	得点	小問番号	内容	得点	小問番号
T1	基礎統計量	29	1-8, 21-41	計算	26	1-26
T2	計算	12	9-20	相関と回帰	30	27-56
T3	正規分布	19	42-60	分割表	21	57-77
T4	JMP の解釈	40	61-100	JMP の解釈	23	78-100

2.2 2012年の分析（欠席者増大の理由の分析）

(1) 3年間の成績評価

表3は3年間の成績である。中間試験では、最低点と10%点が2010年から2012年にかけて10点と11点減少している。50%点と90%点と平均は2010年度が高く、2011年度と2012年度は2点差の範囲に収まっている。期末試験は、最低点と10%点と最高点が2011年度が高く、50%点と90%点と平均は3年間とも2点差の範囲に収まっている。2011年度の期末は半舷授業の影響はあったが、授業運営により最低点と10%点と最高点という小数の成績不振者と優秀者が頑張ったといえよう。これに対して、50%点や平均で示される大勢に大きな影響はなかったようだ。

中間試験と期末試験の比較では、2010年度は最低点から50%点までと平均では期末試験が下がっていて、90%点と最高点は2点差の範囲である。2011年度は、最高点だけが11点高くなり、それ以外は2点差の範囲で好結果であった。2012年度は、期末試験は最低点で1点、50%点で5点、最高点で7点下がっている。一方、10%点で4点、90%点で3点、最高点で7点上がっている。以上から、2010年度は期末試験の方が一般的に範囲が広く中間の応用なので成績が下がっているのは理解ができる（ただし、2011年の期末に99点取った学生は、中間試験の正規分布が一番難しかったと言っているのは、未知との遭遇あるいは異文化理解のハンデキャップであろう）。これに対して2011年は、最高点を除けば中間と期末はほぼ同じである。2012年は、中央値以上の学生の成績が上がり、中央値以下の学生の成績が悪い。これは欠席者の増大が原因の一つと考えられる。

各年度の中間と期末試験の相関と単回帰分析した場合の決定係数を検討する。2010年度は授業の開始年度であり、手探り状態であったため、相関係数が0.54で決定係数が0.29と低い。2011年度は3.11のために期末試験が7回から4回へ半舷授業になったため、前年以上に手綱を引き締めた。この結果、相関係数は0.7で決定係数は0.49と改善した。2012年度は2年間の成果を踏まえ、試験成績の正答分析を行い学生が間違いやすい点に注意し、講義を行った。授業開始前は、3年連続して成績が向上することを期待した。しかし、中間試験以降の欠席

者の増加で、相関係数は0.51、決定係数は0.26と2010年より悪い結果になった。

次元（比）は、最適線形判別関数 [4] で求めた合否判定可能な小問の設問数と、それを合格得点で割った比である。将来試験の質評価に使えるのではないかと考え、併記する。

表3 3年間の成績の比較

		2010年度		2011年度		2012年度	
		合格点	次元（比）	合格点	次元（比）	合格点	次元（比）
中間	0%点	31		25		21	
	10%点	48	6 (0.13)	42	12 (0.29)	37	6 (0.16)
	50%点	66	12 (0.18)	61	15 (0.25)	63	19 (0.30)
	90%点	82	13 (0.16)	79	9 (0.11)	78	15 (0.19)
	最高点	93		88		88	
	平均	65.1		56.1		58.8	
期末	0%点	22		26		20	
	10%点	40	12 (0.30)	43	8 (0.19)	41	10 (0.24)
	50%点	60	12 (0.20)	60	13 (0.22)	58	10 (0.17)
	90%点	82	11 (0.13)	81	8 (0.10)	81	9 (0.11)
	最高点	91		99		95	
	平均	59.3		57.1		58.8	
r と R ²		0.54/0.29		0.70/0.49		0.51/0.26	

(2) 2012年度の欠席の影響の検討

図1は、2012年度の中間試験と期末試験の得点分布と期末試験から中間試験の得点差である。ただし、両方とも受験した121名に限定した。

中間試験の最頻値の65点から70点を濃いグリーンで表示してある。期末試験では、この層に属する学生が40点から100点のヒストグラムに広く散らばっている。この原因は欠席者による理解度の低下が原因の一つと考えられ、もしそれが事実であれば学生にとって就学上の参考になるであろう。

また、中央値が63点から59.9点に4点下がっているが、平均は60.2から59.9点と0.3点下がっただけである。これは、最頻値が期末試験で大きく下がったために中央値を押し下げたが、期末試験では授業に出ていると期待される60点以上の学生が多くなり平均値に変化がなかったためと考えられる。

差は、期末の得点から中間を引いたものである。中央値が-1点で、平均値が-0.36点と

ほぼ差がないと考えてもよいだろう。中央値の-1点で、半分の受講生が期末試験で得点を上げ下げして入れ替わっていることになる。53点と41点も期末で得点を伸ばした2名の学生がいるのに対し、下げた学生の最大値は34点である。この3名の外れ値を省くと、多くの学生は就学意欲の持ちようで+-30点の入れ替えが入門科目で起こりうると考えてよいだろう。また四分位範囲は[-11, 10]であり、この21点の区間に全体の50%の学生がいる。得点差の範囲は87点と民族の大移動を連想させる。また標準偏差は15.3である。

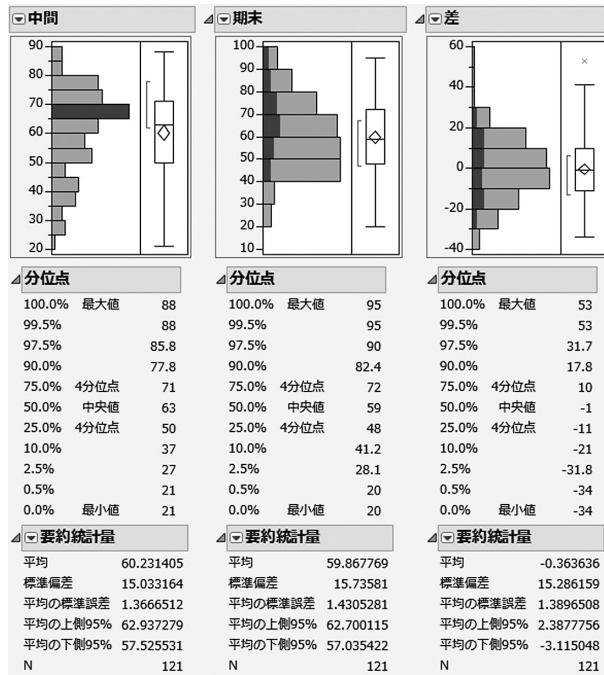


図1 中間と期末の得点分布（中間の最頻値に注目）

図2は、期末試験の最頻値の40点から50点を濃いグリーンで表示してある。中間試験では、この層に属する学生が25点から80点のヒストグラムに広く散らばっている。すなわち、中間試験の広い得点分布に属する学生の一部の評価が、CかFの境界にまで評価を下げたことが分かる。またこの最頻値のヒストグラムの区間に、得点を34点下げた学生から20点あげた学生が含まれているが、下げた学生の方が多そうだ。

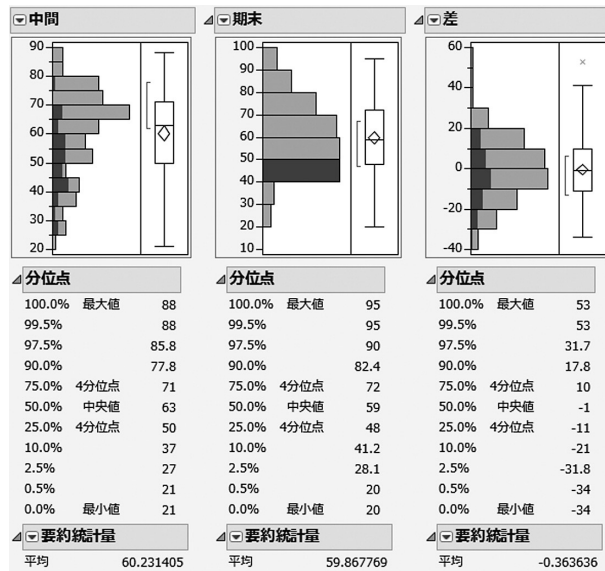


図2 中間と期末の得点分布 (期末の最頻値に注目)

図3は、期末試験の80点以上を濃いグリーンで表示してある。中間試験では、この層に属する学生が35点から90点（実際は88点）のヒストグラムの区間に広く散らばっている。すなわち、中間試験の広い得点分布から80点以上の学生が構成されている。中間試験の基礎統計量は、いってみれば分散と標準偏差、およびパーセント点の理解が中心であり、期末試験はその理解を前提にしている。本来であれば、これらの学生は授業に対する取り組みが早ければ、中間でも高得点を得たはずである。また差の濃いグリーンが0以上であることから、期末で80点以上の学生はほとんどが期末試験の得点が中間より高いことが分かる。

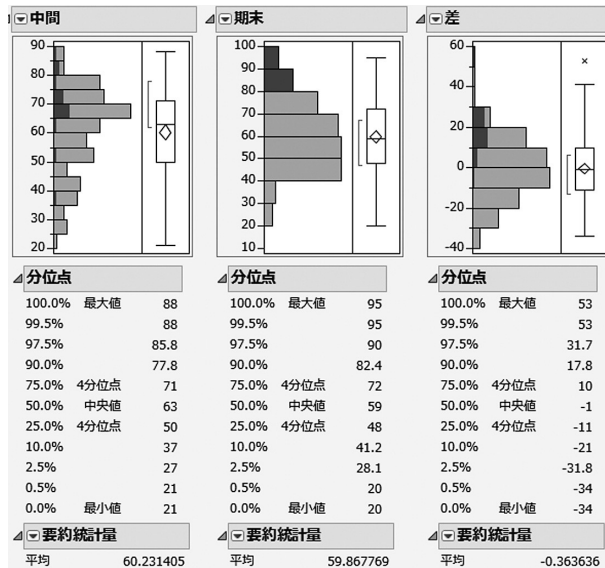


図3 期末試験の80点以上の分析

図4は期末試験の50点未満を濃いグリーンで表示してある。中間試験では、この層に属する学生が21点から80点の区間に広く散らばっている。すなわち、中間試験の広い得点分布から50点未満の学生が構成されている。少なくとも中間試験が50点以上の学生の欠席を防ぎ、勉強に注力させれば、成績不振者の多くを減らせた可能性がある。

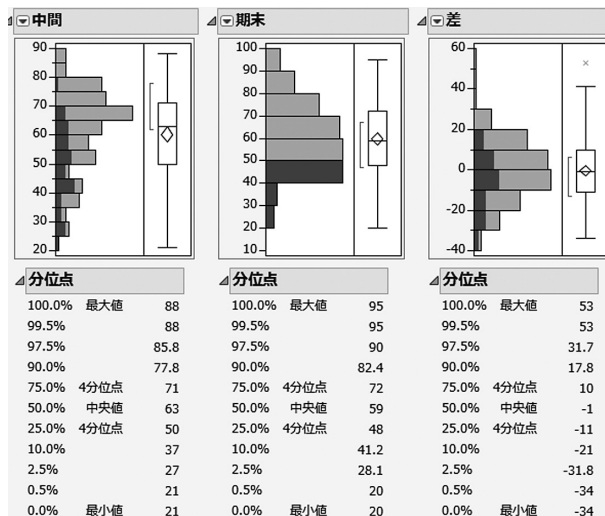


図4 期末試験の50点以下の分析

(3) 得点の散布図

図5は、中間の得点をX軸に、期末の得点をY軸に取った散布図である。中間と期末の一方を受験しなかった学生の4名を0点にした125名で描いているが、本年度は70点以上の高得点を取る学生はいなかった。この4名を除くと、95%の正規確率楕円の外に、両試験が21点と20点という成績不振学生と、37点から90点と53点得点を伸ばした学生と、35点から76点と41点得点を伸ばした学生の2名がいる。これらの学生は、「大学へ入ったら遊ぼうぜ」という本来潜在応力のある学生が、中間の得点を公表しているので、中間試験の余りの成績の悪さを反省して期末試験に臨んだのであろう。得点の公表は、試験問題の得点欄に予想得点を記入させ、実際の得点との差をIt'sClassに公開している。この功罪は、中間試験で比較的成績の良い学生が慢心して中間試験以降に出席率が悪くなることと、成績不振者があきらめることである。本年度は、分析結果から前者が圧倒的に多かったと考えられる。単回帰直線の回帰係数が0.53と中間の得点は期末の得点の半分しか説明できないことが分かる。また決定係数は0.26と小さい。これは中間と期末に相関がないのではなく、学生の就学の態度に影響されていると考えられる。学生も教員も、理数系の科目では漠然と中間と期末に強い相関があると誤解していることを糺していく必要がある。

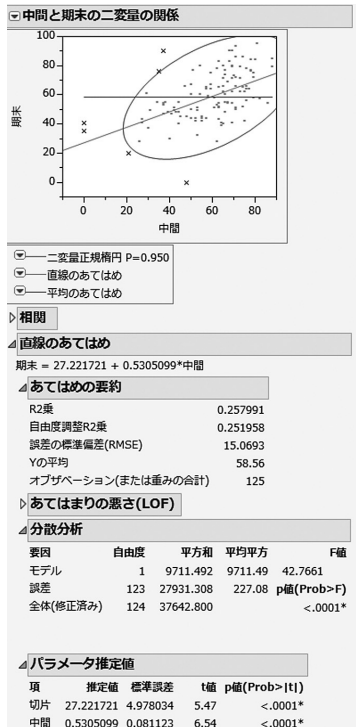


図5 中間の得点 (X軸) と期末の得点 (Y軸) の散布図

(4) 分割表による評価の変動の分析

図6は、中間と期末の得点を評価に直したものである。実際の評価は、受験者上位から15%をS、30%をA、30%をB、15%をC、10%をF、未受験者をFの5段階で評価している。しかし、本分析では10%点、50%点、90%点で受講生を4層に分け、成績の良い方から1から4で表わす。中間試験で90%点以上の1層の12人中の8人(6.61%)が期末試験で第2層と3層に成績を下げている。期末も中間と同じく容易と間違った判断の結果であろう。中間試験で第2層の55人中の19人(全体の15.7%)が期末試験で第3層と4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは7人(5.79%)である。第3層の45人中の4人(全体の3.31%)が期末試験で第4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは15人(12.4%)である。第4層の9人中の6人(全体の4.96%)が期末試験で第2層と第3層に成績を上げている。結局、31人(25.62%)が評価を下げ、28人(23.15%)が評価を上げ、約49%が入れ替わった。

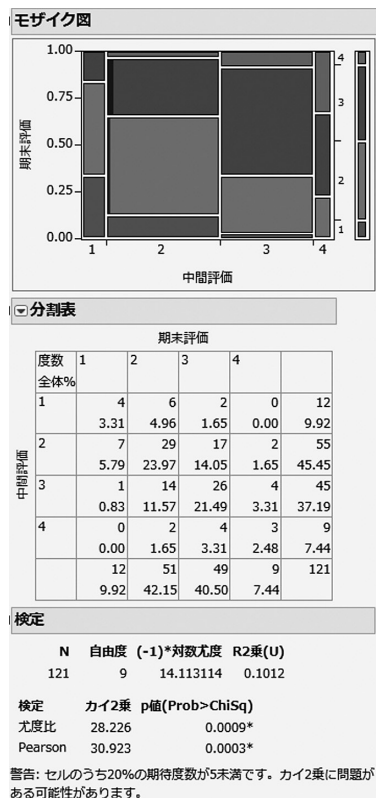


図6 中間と期末の得点評価の分割表

2.3 2011年との比較

2.2の分析から、2012年度に何らかの理由で欠席者が増加し成績の入れ替えが大規模に起こったことが予見された。そこで2011年度で比較し検証する。図7から、最頻値はいずれも50点から60点の区間で同じである。中央値は58点と同じで、平均値は56.1点が57.1点へ1点上がっている。すなわち、2012年のように最頻値も中央値も下がっていない。

期末試験の80点以上の受講生を濃く表示して注目すると、中間試験で60点以上の学生から構成され、中間試験の80点以上のほぼ1/3が成績を下げている。差の中央値は0で平均値は1で、四分位範囲は[-8, 9]で、17点の範囲に50%の学生が入っている。2012年は21点の範囲なので、やはり2012年の方が得点の上下変動が大きいことが分かる。

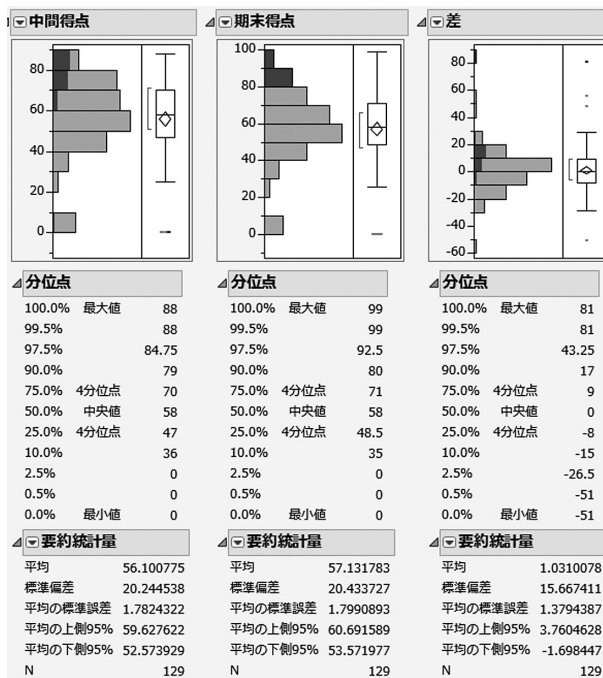


図7 期末試験の80点以上の受講生を濃く表示

図8は、中間と期末の散布図である。中間試験の未受験者で期末試験が80点台の学生がいる。中間と期末のいずれか一方を休んだ学生で、正式の理由が分かれば、どちらかの得点の8割をみなし得点にしているが、この学生は医師の診断書や遅延証明書の提示がなかったため、評価は40点すなわちcになる。一方の試験の未受験者以外の学生で、95%信頼区間をはみ出す者はいなかった。また単回帰係数は0.71で、2012年度より中間試験で期末の得点の変動を説明できる。また決定係数は0.49である。

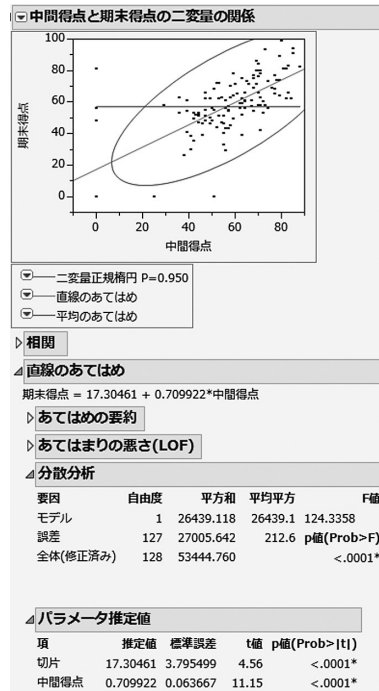


図8 中間と期末の散布図

図9は、中間と期末の得点を、3水準で受講生を4層に分け、成績の良い方から1から4で表わした分割表である。中間試験で90%点以上の高得点の13人中の5人(3.88%)が期末試験で第2層にだけ成績を下げている。中間試験で第2層の47人中の15人(全体の11.63%)が期末試験で第3層と4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは3人(2.33%)である。第3層の50人中の6人(全体の4.65%)が期末試験で第4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは14人(10.85%)である。10%点以下の19人中の8人(全体の6.2%)が期末試験で第2層と第3層に成績を上げている。以上から、評価を下げた学生は26人(20.16%)で、成績を上げた学生は25人(19.38%)で約40%になる。2012年は31人(25.62%)が成績を落とし、28人(23.15%)が評価を上げているが、2011年に比べ8人ほど入れ替えが大きかったことが分かる。

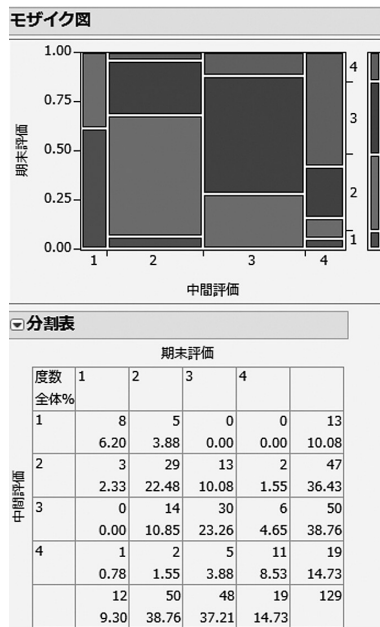


図9 分割表

2.4 2010年との比較

2.2の分析から、2012年度が何らかの理由で欠席者の増加で成績の入れ替えが大幅に起こったことが予見される。そこで2010年度で比較検討する。図10から、最頻値は中間試験の60点から70点の区間で、期末は50点から60点の区間と60点から70点の両方の区間である。中央値は65点から59点へ6点下がっている。平均値は65.1点から59.3点へわずかであるが0.8点下がっている。これは初年度のため、筆者の授業の不慣れがあったと考えられる。期末試験の80点以上の受講生を濃く表示すると、中間試験で60点以上から93点の学生であることが分かる。差より-10点以上の得点差の学生であることが分かる。四分位範囲は[-15,4]で、19点の範囲に50%の学生がいる。ただし中央値が-7点と全体的に下がっていることを表している。

結局2011年の四分位範囲が17点で、2010年が19点で、2012年が21点という結果である。半舷授業の年が一番変動が少ないことになる。

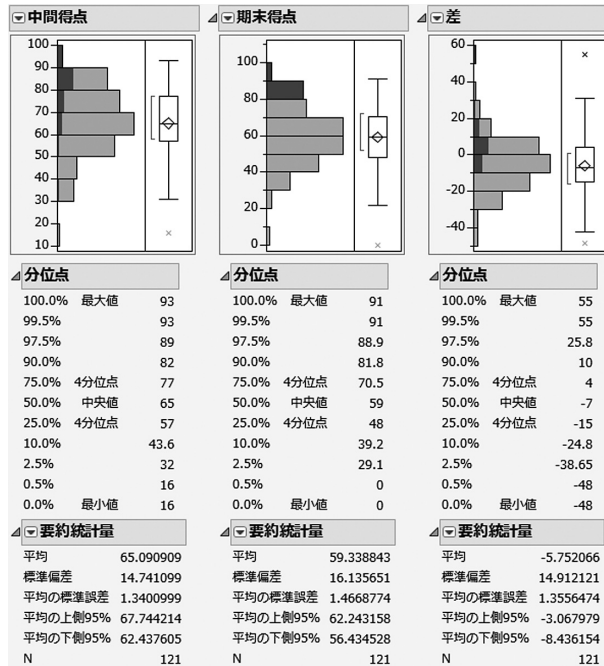


図10 期末試験の80点以上の受講生を濃く表示

図11は、中間と期末の散布図である。期末試験の未受験者で中間試験が75点前後の学生がいる。中間と期末のいずれか一方を休んだ学生で、正式の理由が分かれば、どちらかの得点の8割をみなし得点にしているが、この学生は医師の診断書や遅延証明書の提示がなかった。それ以外の学生で、95%信頼区間をはみ出す者は2名いた。特に中間が30点台で期末が90点近くの学生は、「大学に入ったら遊ぼうぜ」というゆったり型の学生である。また単回帰係数は0.54で決定係数は0.29で、2012年度とはほぼ同じである。

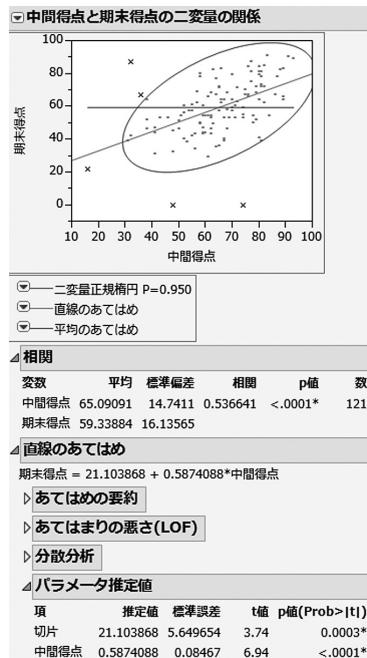


図11 中間と期末の散布図

図12は、中間と期末の得点を、3水準で受講生を4層に分け、成績の良い方から1から4で表わした分割表である。中間試験で第1層の13人中の7人(5.83%)が期末試験で第2層と第3層に成績を下げている。第2層の47人中の17人(全体の14.17%)が期末試験で第3層と4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは4人(3.33%)である。第3層の47人中の6人(全体の5%)が期末試験で第4層に成績を下げている。これに対して評価が良くなったのは15人(12.5%)である。10%点以下の13人中の10人(全体の8.33%)が期末試験で第2層と第3層に成績を上げている。成績評価を下げた学生が30人(25%)で、評価を上げた学生が29人(24.16%)と2012年の59人と同程度である。授業運営の不慣れと、欠席者数の増大は、いずれも学生の理解度に悪影響を与えているといえる。

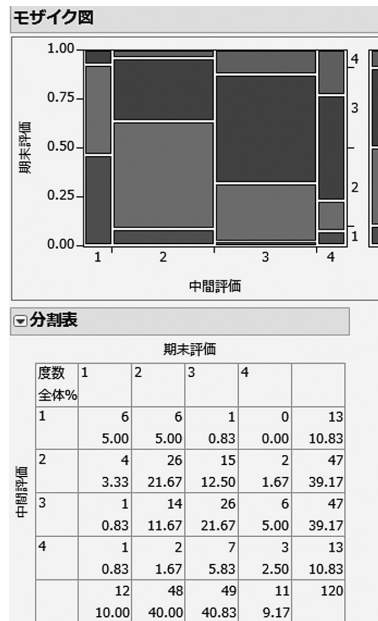


図12 中間と期末の評価の分割表

2.5 まとめ

以上から、2012年度は2011年のような半筋授業の影響がないこと、2年間の実績を踏まえて学生の間違いやすい点を講義したにもかかわらず、中間試験以降に欠席者が多く出たため、全体として2010年とほぼ同じか少し悪い授業の達成度だったと判断せざるをえない。

3. 大問と小問による合否判定

MNM基準による最適線形判別関数 [4] と、ロジスティック回帰、Fisherの線形判別関数 (LDF)、2次判別関数 (QDF) で合否判定 [5] の検証を行う。最適線形判別関数はLINGO [6, 7] で、ロジスティック回帰、LDF、QDFはJMP [8, 9] を用いた。合否判定は3水準で行い、説明変数としては10択100問の小問を100個の説明変数とした判別と、それらを4個の大問の得点にまとめた判別で比較検討する。

3.1 大問の分析

(1) 中間試験の分析

表4は、3年間の中間試験の大問4問の得点を説明変数とした判別結果である。「p」列は、変数増加法で選ばれた説明変数の個数を示す。2列目の「Var」列は合否判定を10%点にした場合の、変数増加法で選ばれた説明変数を表す。その後は、50%点、90%点の3水準による

合否判定である。大問はT2 (計算), T1 (基礎統計量の解釈), T4 (JMPの出力の解釈), T3 (正規分布) の順に難易度が高くなると考えている。

最適線形判別関数によるMNMとロジスティック回帰は、2010年の10%点、50%点、2011年の50%点、2012年の50%点と90%点は大問4問で合否判定できた。2010年の90%点、2011年の10%点と90%点で、3問で合否判定できた。2012年の10%点はT4とT2で合否判定できた。成績の悪い10%点以下の学生は、JMPの解釈まで手がつけれなかったことを表している。他の学生にとっては、実際のデータを用いて統計ソフトから出てくるグラフの見方の解釈は、興味をもつものが多い。

LDFとQDFは、大問4問使っても全試験で合否判定できなかった。

一方、10%点の合否判定では、正規分布が難しいのでT3は合否判定に関与しないことが分かる。また90%点の合否判定ではT2の計算問題が簡単すぎて合否判定に不要であるが、2012年度は合否判定に用いられている。少なくとも、大問でMNMによる合否判定を行えば、少しは試験の質評価に役立ちそうだ。

表4 2010年度から2012年度の中間大問の合否判定 (pは変数増加法の説明変数の数)

P	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD
1	T4	6	9	11	11	T4	16	16	16	16	T3	10	27	24	24
2	T2	2	6	11	9	T3	9	10	12	12	T4	5	10	20	11
3	T1	1	3	8	5	T1	2	2	5	6	T1	0	0	20	10
4	T3	0	0	9	2	T2	0	0	3	6	T2	0	0	20	11

P	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD
1	T2	9	17	15	15	T4	9	9	9	9	T3	6	7	14	14
2	T4	4	9	11	9	T1	4	4	5	7	T4	1	1	14	6
3	T1	0	0	9	10	T3	1	2	3	3	T1	0	0	13	5
4	T3	0	0	9	11	T2	0	0	3	3	T2	0	0	14	9

p	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF
1	T4	4	8	14	12	T4	12	12	14	12	T3	8	30	21	21
2	T2	0	0	11	9	T1	6	5	8	8	T1	5	12	18	13
3	T1	0	0	12	8	T2	3	3	7	8	T4	3	3	17	10
4	T3	0	0	12	1	T3	0	0	6	6	T2	0	0	17	9

(2) 期末試験の分析

表5は、3年間の期末試験の大問4個の得点を説明変数とした3水準の合否判定である。大問はT1（計算）、T2（相関と回帰）、T3（分割表）、T4（JMPの出力の解釈）であるが、出題者として事前に難易度は分からなかった。

大問4問使ってもLDFと2次判別関数は、全試験で合否判定できなかった。これに対して、MNMとロジスティック回帰は大問4問で合否判定できた。

どの年度でも、T1（計算）が10%点の合否判定で逐次変数増加法で最初に選ばれ、90%点では最後に選ばれている。これは手計算が多くの学生にとって、理解できる内容であることを示す。そして、合格水準が上がるにつれ合否判定に占める重要性が少なくなっていくものと解釈できる。すなわち計算式で統計量を理解させるのではなく、簡単なデータを暗算で計算させる試みが上手くいったものと考えたい。

表5 2010年度から2012年度の期末試験の大問の合否判定（pは変数増加法の説明変数の数）

p	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF	Var.	MNM	Logi	LDF	QDF
1	T1	10	27	13	13	T2	17	17	19	19	T3	10	19	10	14
2	T2	5	7	8	10	T4	12	13	13	15	T2	3	9	6	6
3	T4	4	8	6	6	T1	5	6	8	9	T4	2	4	4	4
4	T3	0	0	5	2	T3	0	0	4	5	T1	0	0	4	13

P	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD	Var	MNM	Logi	LDF	QD
1	T1	8	28	22	22	T2	17	17	17	17	T4	6	22	6	6
2	T4	4	7	7	12	T3	11	12	16	12	T2	3	5	5	7
3	<u>T3</u>	2	5	15	8	T4	4	5	9	8	<u>T3</u>	1	1	5	3
4	T2	0	0	16	4	<u>T1</u>	0	0	4	5	T1	0	0	5	12

p	var.	MNM	Logi	LDF	QDF	var.	MNM	Logi	LDF	QDF	var.	MNM	Logi	LDF	QDF
1	T1	6	13	10	10	T2	19	19	19	19	T2	7	20	20	16
2	T4	3	10	11	11	T3	9	10	15	13	T3	4	6	18	13
3	T3	2	7	10	11	T1	3	4	10	6	T4	2	2	19	8
4	T2	0	0	11	8	T4	0	0	3	3	T1	0	0	17	6

3.2 小問100問の分析

(1) 中間試験

表6は、2010年度の中間試験の小問100個を説明変数とした合否判定である。左から10%点、50%点、90%点の3水準の判別結果である。「P」列は、変数増加法で選ばれた説明変数の個数を示す。2列目の「Var」列は合否判定を10%点にした場合の、変数増加法で選ばれた説明変数を表す。4個の小問が全員正解であり、これらを省いた96変数をフルモデルとして誤分類数を求めた。その後に50%点と90%点の同様な結果を示す。

ロジスティック回帰は、線形分離可能なデータでは、必ず回帰係数の推定が不安定になる[10]。JMPでは回帰係数の標準誤差が大きくなり95%信頼区間は0を含み、全ての回帰係数の推定値が不安定であるというエラーが表示される。推測統計学の考え方に反するが、このような場合で誤分類数が0であれば、最適線形判別関数の結果からほぼ線形分離可能なことが分かる。ただし、表6の2010年の中間試験の90%点では、必ずしも合否判定できない例もある。

合否判定できる最小次元は、全ての説明変数の組み合わせモデルで検討していないので、ここで得られたものより少なくなることはありうる。一応、10%点では6変数、50%点では12変数、90%点では13変数で $MNM=0$ であるが、ロジスティック回帰では14変数で初めて誤分類数が0になった。すなわち、 $MNM=0$ のデータでロジスティック回帰の誤分類数は必ず0になるとはいえないことが分かった。10%点、50%点、90%点では合格最低点が48点、66点、88点と増えていくので、次元数($MNM=0$ になる変数の数)も上がっていくと考えられる。これを表のイメージから「右下がり傾向」と呼ぶことにする。今後、試験の質と関係するのではないかと考えているが、今回は取り上げない。

LDFとQDFは、最初に $MNM=0$ になる下線を引いた判別モデルで誤分類数は0でない。またLDFの96変数の誤分類数はすべて0である。QDFの誤分類数は、10%点で109、50%点で61、90%点で13個であり、いずれも合格群の全てを誤判別している。しかも10%点では、全体の受講生の90%の合格者群が10%の不合格者群に誤判別されている。これは、4章で示す図2のように、10%点未満の不合格者群の分散共分散が大きく、合格者群の長軸とほぼ直交しているので起こるのではないかと考えているが、今後の検討課題である。以上の判断は3年間模索した結論であるが、本稿を再考中に2群の分散共分散行列を調べて次のことが分かった。一つの群の変数が一定の値をとると分散が0になり、分散共分散の対応する行と列が0になり退化し、合格群が不合格群に誤判別された状態になる。このため、これ以降のQDFの合格群は不合格群に誤判別されるという記述は読み飛ばしてほしい。

表6 2010年度の中間試験の判別結果 (次元は右下がり傾向)

P	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF
1	36	11	11	11	11	93	28	28	28	28	57	13	18	19	19
·															
<u>6</u>	61	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	99	9	9	9	12	59	5	5	8	7
7	38					84	6	6	7	7	58	4	4	9	7
·															
<u>12</u>	65					22	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	3	1	1	6	13
13	72					67					63	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>13</u>
<u>14</u>	99					34					8		0	5	13
96	46		0	0	109	44		0	0	61	30		0	0	13

表7は、2011年度の中間試験の判別結果である。2個の設問が全員正解であり、98変数まで求まった。10%点では12変数、50%点では15変数、90%点では9変数で合否判定可能である。これらの最小次元を、「V傾向」と呼ぶ。LDFと2次判別関数は、 $MNM=0$ のモデルで誤分類数は0でない。また、98変数のLDFの誤分類数は0である。QDFの誤分類数は、10%点で107、50%点で61、90%点で9個であり、QDFはいずれも合格群の全てを誤判別している。

表7 2011年度の中間試験の判別結果 (次元はV傾向)

P	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF
1	13	9	9	9	9	84	19	19	19	19	54	9	28	28	9
·															
8	89	2	9	5	107	58	2	2	7	3	98	1	5	6	9
9	22	2	7	2	107	83	2	2	5	5	94	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>6</u>	<u>9</u>
10	17	2	2	3	107	23	2	2	5	5	56				
11	90	1	2	4	107	82	2	3	5	5	52				
12	14	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>107</u>	63	1	1	5	5	82				
13	18					26	1	1	5	6	40				
14	78					52	1	1	4	5	55				
15	69					98	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>3</u>	<u>6</u>	78				
98	87		0	0	107	91		0	0	61	51		0	0	9

表8は、2012年度の中間試験の判別結果である。全員正解の設問がないので100変数まで求まった。10%点では6変数、50%点では19変数、90%点では15変数で合否判定可能である。これらの最小次元を、90%点の次元が小さくなる「V傾向」と呼ぶ。LDFとQDFは、 $MNM=0$ のモデルで誤分類数は0でない。また、100変数のLDFの誤分類数は0である。QDFの誤分類数は、10%点で114、50%点で67、90%点で12個である。特に90%点では1変数から100変数まで合格群を不合格に誤判別している。

表8 2012年度の中間試験の判別結果 (次元はV傾向)

p	VAR	MNM	Logi	LDF	QDF	VAR	MNM	Logi	LDF	QDF	VAR	MNM	Logi	LDF	QDF
1	x85		14	22	14	x87					x92	34	12	12	
2	x15		6	22	114	x77					x42	34	8	12	
3	x68	5	6	13	114	x26					x21	19	5	12	
4	x47	3	8	13	114	x89					x54	4	8	12	
5	x7	1	1	7	114	x35					x65	7	3	12	
6	x32	0	0	7	114	x69					x100	3	3	12	
7	x20	0	0	4	114	x25					x83	3	3	12	
.															
14	x98					x73	1	1	1	3	x1	1	1	1	12
15	x5					x12	1	1	1	3	x62	0	1	1	12
16	x1					x7	1	1	1	4	x3		0	1	12
17	x23					x27	1	1	1	3	x59		0	1	12
18	x38					x39	1	1	1	2	x60		0	0	12
19	x6					x95	0	0	0	3	x96		0	0	12
.															
100	x97		0	0	114	x82		0	0	67	x19			0	12

(2) 期末試験

表9は、2010年度の期末試験の判別結果である。1個の設問が全員正解であり、これを省いた99変数まで求まった。10%点と50%点では12変数、90%点では11変数で合否判定可能である。ただし、50%点ではロジスティック回帰が31変数まで誤分類数が1で、1人の受験生の判別に手間取っていることが分かる。これは判別超平面上のケースを陽性と指定した方に判別している問題と考えられる。また90%点では、11変数で誤分類数が0にならないで12変数で0になった。これらの最小次元は、一応「平坦な傾向」と呼ぶことにする。「右下がり傾向」

と異なり、このような傾向を示す試験の特徴として考えられることは今の時点で明確でない。

LDFとQDFは、 $MNM=0$ のモデルで誤分類数は0でない。また、99変数のLDFの誤分類数は0である。QDFの誤分類数は、10%点で111、50%点で62、90%点で13個である。QDFはいずれも合格群を誤判別している。これらはJMPが「正規化法」に切り替えることを勧めた際に起きたが、図15に示す分散共分散の問題のいずれが原因か分かっていない。

表9 2010年度の期末試験の判別結果

P	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF
1	18	12	15	15	15	22	12	26	26	26	68	12	29	29	29
.															
10	4	1	1	5	2	63	6	4	6	10	93	6	2	5	13
11	1	1	1	5	111	90	1	1	6	9	34	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>6</u>	<u>13</u>
12	2	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>5</u>	<u>111</u>	19	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	70		0	4	13
13	44					14		1	3	4	63				
14	54					41		1	3	3	42				
.															
31	75					10		1	1	62	14				
32	41					62		0	1	62	12				
.															
99	73		0	0	111	71		0	0	62	58		0	0	13

表10は、2011年度の期末試験の判別結果である。3個の設問が全員正解であり、97変数まで求まった。各3水準で8変数、13変数、8変数で合否判定可能であり、次元は90%点の次元が小さくなる「V傾向」になる。LDFとQDFは、 $MNM=0$ のモデルで誤分類数は0でない。また、LDFの97変数の誤分類数は0である。QDFの誤分類数は、各3水準で110、62、12個であり、QDFはいずれも合格群を誤判別している。

表10 2011年度の期末試験の判別結果 (次元はV傾向)

P	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF	Var	MNM	Logi	LDF	QDF
1	14	10	10	10	10	32	30	30	30	30	100	12	23	23	23
.															
7	81	1	2	4	3	79	8	10	12	12	49	1	1	3	12

8	31	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	83	6	6	9	8	95	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>12</u>
9	25					34	4	7	9	8	92				
10	41					89	4	6	9	5	39				
11	58					12	3	5	8	7	19				
12	12					46	2	4	6	7	70				
13	91					30	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	62				
.															
97	73		0	0	110	11		0	0	62	99		0	0	12

表11は、2012年度の期末試験の判別結果である。3個の設問が全員正解であり、97変数まで求めた。各3水準で10変数, 10変数, 9変数で合否判定可能であり、次元はほぼ平坦である。LDFとQDFは、 $MNM=0$ のモデルで誤分類数は0でない。また、LDFの97変数の誤分類数は0である。QDFの誤分類数は、各3水準で115, 63, 12個であり、QDFはいずれも合格群を誤判別している。

表11 2012年度の期末試験の判別結果 (次元は平坦)

p	var.	MNM	Logi	LDF	QDF	var.	MNM	Logi	LDF	QDF	var.	MNM	Logi	LDF	QDF
1	X8	10	10	10	10	X33	29	29	29	29	X67	12	20	20	20
2	X59	8	10	10	10	X88	23	23	23	23	X100	11	24	24	24
3	X14	5	19	10	10	X15	21	21	21	21	X36	5	5	6	10
4	X27	4	5	6	115	X70	12	13	14	14	X42	3	5	8	12
5	X41	3	5	5	115	X22	10	11	11	10	X98	2	2	6	12
6	X42	3	5	5	115	X39	8	9	10	11	X55	1	1	7	12
7	X83	2	1	6	115	X61	5	7	9	10	X50	1	1	4	12
8	X18	1	1	4	115	X47	4	8	9	9	X41	1	5	6	12
9	X79	1	1	2	115	X95	2	4	6	7	X57	0	0	6	12
10	X78	0	0	3	115	X75	0	0	5	4	X94	0		4	12
11	X17			4	115	X20			6	4	X92			6	12
.															
97	X86	0	0	0	115	X38	0	0	0	63	X39	0	0	0	12

3.3 変数選択

表12は変数増加法 (F), Cp統計量, AIC, BICで選ばれた説明変数の個数を示す。変数増加法はFin = 0.25で選んだ。Cp統計量とAICとBICは, 変数増加法で $|Cp-(p+1)|$ 値とAICとBICの値が最初に極小値になるモデルを選んだ。MNMは最適線形判別関数で最初にMNM=0になるモデルの次元数である。

表12 変数増加法, Cp統計量, AIC, BICとMNMで選ばれた説明変数の個数

	10%					50%					90%				
	F	Cp	AIC	BIC	MNM	F	Cp	AIC	BIC	MNM	F	Cp	AIC	BIC	MNM
2010 中間	<u>30</u>	4	<u>22</u>	<u>11</u>	6	<u>52</u>	<u>25</u>	<u>25</u>	8	12	<u>28</u>	5	<u>15</u>	8	13
2010 期末	<u>48</u>	<u>29</u>	<u>26</u>	<u>17</u>	12	<u>28</u>	5	<u>19</u>	<u>14</u>	12	<u>22</u>	5	<u>15</u>	8	11
2011 中間	<u>42</u>	10	<u>19</u>	10	12	<u>32</u>	4	<u>21</u>	10	15	<u>19</u>	2	<u>13</u>	5	9
2011 期末	<u>38</u>	8	<u>23</u>	<u>14</u>	8	<u>48</u>	<u>21</u>	<u>28</u>	<u>15</u>	13	<u>22</u>	1	<u>15</u>	7	8
2012 中間	<u>43</u>	<u>25</u>	<u>30</u>	<u>15</u>	6	<u>40</u>	14	<u>22</u>	15	19	<u>46</u>	9	<u>15</u>	8	15
2012 期末	<u>64</u>	<u>11</u>	<u>20</u>	8	9	<u>35</u>	7	<u>22</u>	<u>13</u>	10	<u>45</u>	2	<u>12</u>	8	9

MNM=0になる値を基準にして検討すると, 従来の変数選択法で選ばれる説明変数の数は幅広く散らばっている。ただし, 各水準で24個ある変数選択法のうち, 下線を引いた19個, 17個, 12個がMNMで合否判定できる次元より大きなモデルを選び, 5個, 7個, 12個は小さいモデルを選ぶ傾向がある。少なくとも, MNM=0のモデルを選ぶのに適した検定法はないといえる。

合否判定を10%点, 50%点, 90%点にすると, 合否判定の最低得点が上がっていくので, 一般的には合否判定可能な設問数の個数も上昇することが考えられるが, 多くの場合そのような傾向は示さなかった。

3.4 2次判別関数が合格群を誤判別する現象

QDFは, 大問全問を用いても合否判定できないが, 合格群が不合格群に誤判別されることはなかった。しかし小問では, 全ての合否判定で合格群が不合格群に誤判別された。この理由は明確には分らないが, 主成分分析のスコアプロットで, 現象面的なおおよその理由はわかる。

図13は, 2010年度の中問試験の小問100問を主成分分析し, 主成分1をX軸で主成分2をY軸にしたスコアプロットである。左図は, 3水準で4層に分けて95%確率楕円を描いた。右から左の95%確率楕円は, 90%以上の成績優秀な第1層の学生から, 第2層, 第3層, 第4層に

層別した受講生の分布である。このように、合格最低点が表3に示す48点、66点、82点と左から右に上がっていくと、理数系の科目では設問間に関係があるため、正答のパターンは減少していく。このため、第4層から第1層まで、分散共分散を表す95%確率楕円が小さくなっていく。

右は、10%点による合否判定である。わずか10%しかいない左の不合格群の学生が、正解が少ないが正解のパターンが多様であり、このため分散共分散が大きくなっている。そして右にある48点以上の90%をしめる合格群とほぼ長軸が直交している。これが、90%の合格群が10%の不合格群に誤分類された原因かもしれない。しかし、他の事例ではこのような明確な特徴を示さなくても2012年の中間の10%以外は誤判別される。また、JMPが正則化法に切り替えた場合も、多くの場合に一方を誤判別される。これは、線形分離可能なデータで、正則化法に問題があることを示す。

以上から、このスコアプロットは各試験の可視化表現として有用と考えられる。

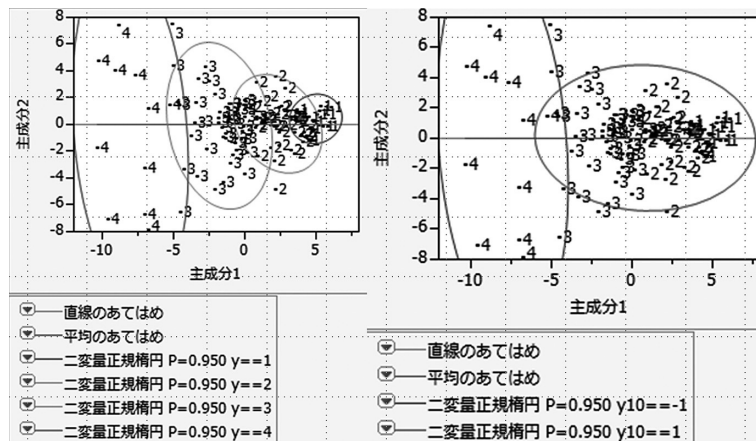


図13 2010年度の中間試験のスコアプロット (4層と10%点)

図14は、50%点と90%点の合否判定である。50%点では、66点以上の学生の正答パターンが少なくなっていく、第2主成分上に正答パターンが広がる不合格群と直交しているので、合格群が不合格群に誤判別することは理解できる。右の90%点では、合格群が不合格群に含まれている。本来はこの2群を線形分離する線形超平面はあるが、それを主成分分析で見つけることは困難であることを示す。

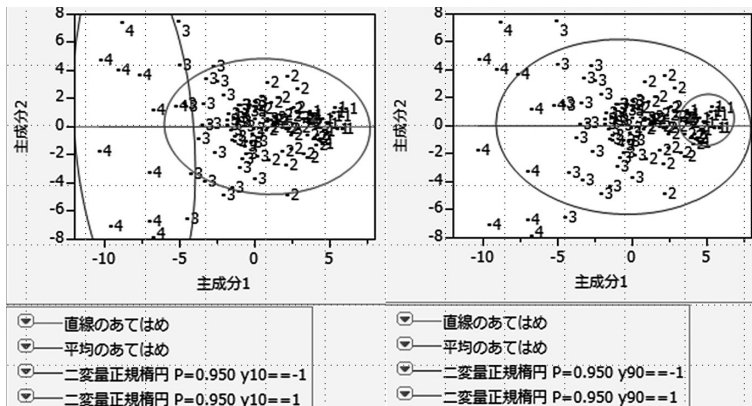


図14 2010年度の中間試験のスコアプロット (50%点と90%)

図15は、2010年度の期末試験の4層 (左) と10%点 (右) のスコアプロットである。中間と異なり、第1層以外、第2層と第3層は、第4層よりも分散共分散が大きい。右の10%水準の合否判定は、不合格群よりも90%の受講生の合格群の分散共分散が大きいのに、不合格群に誤判別される。この理由は全く不明である。

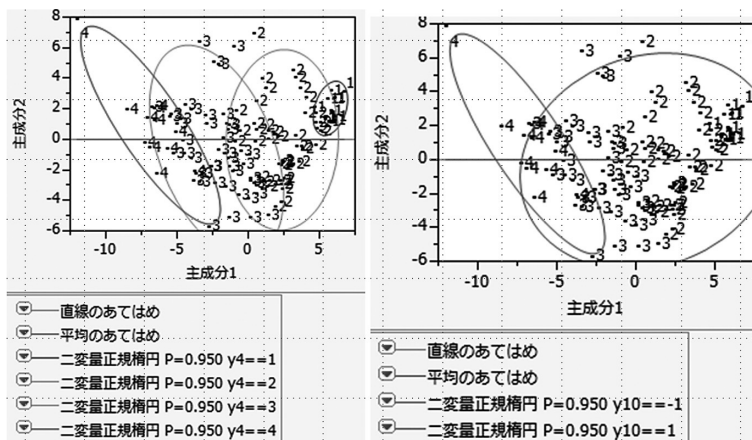


図15 2010年度の期末試験のスコアプロット (4層と10%)

図16の50%点 (左) の合否判定は、50%の合格群の分散共分散は不合格群より小さいが、不合格群に誤判別されてしまう。Fisherの仮説で、分散共分散行列が異なる場合、LDFでなくQDFを使うことが推奨されている。しかし本データにLDFを使えば、誤分類数が多くても合格群をすべて不合格に誤判別することは起こらない。すなわち、頭の中で考えた理論が現

実にいかに合わないかを例証している。右の90%点のQDFによる合否判定で、合格群が誤判別されることは理解できる。

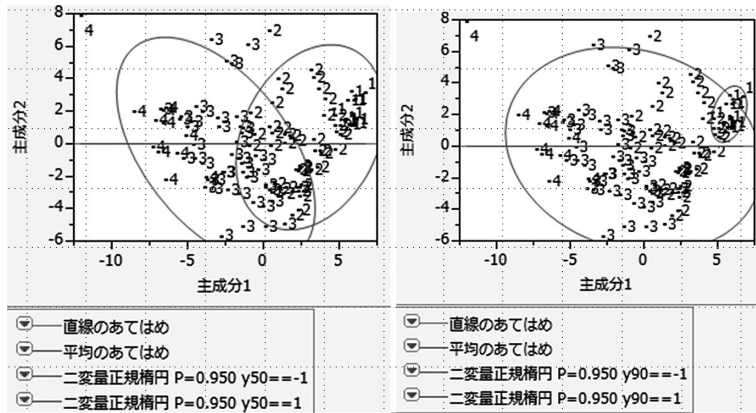


図16 2010年度の期末試験のスコアプロット (50%点と90%)

図17は、2011年度の間試験の4層(左)と10%点(右)のスコアプロットである。左図から、第1層から第3層までは第4層と長軸がほぼ直交し、分散共分散が小さい。右図の10%点の合否判定では、合格群は不合格群に直交し分散共分散もわずかに小さい。

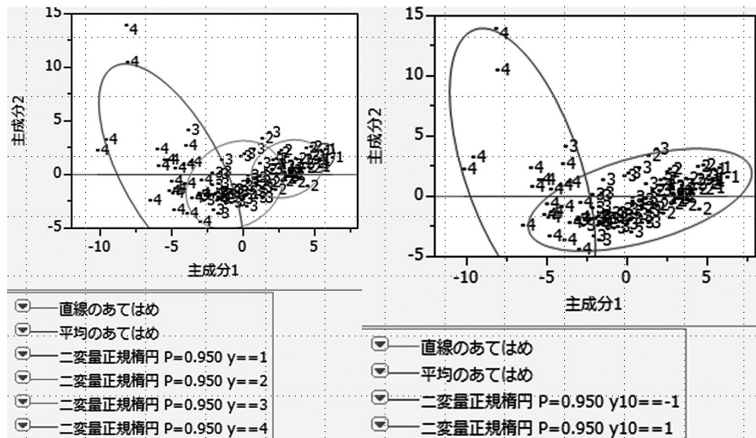


図17 2011年度の間試験のスコアプロット (4層と10%)

図18は、2011年度の間試験の50%点と90%点のスコアプロットである。QDFで合格群が不合格群に誤判別されたことはわかる。

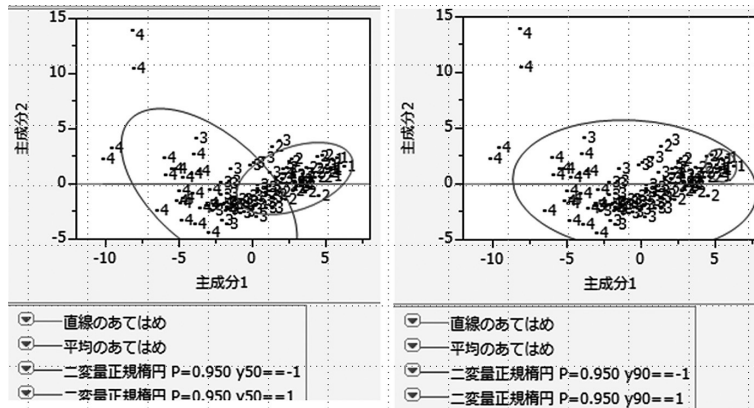


図18 2011年度の間試験のスコアプロット (50%点と90%点)

図19は、2011年度の期末試験の4層（左）と10%点（右）のスコアプロットである。第3層は第4層よりも分散共分散が大きいようだ。右図の90%いる合格群が10%の不合格群に誤判別された理由はわからない。

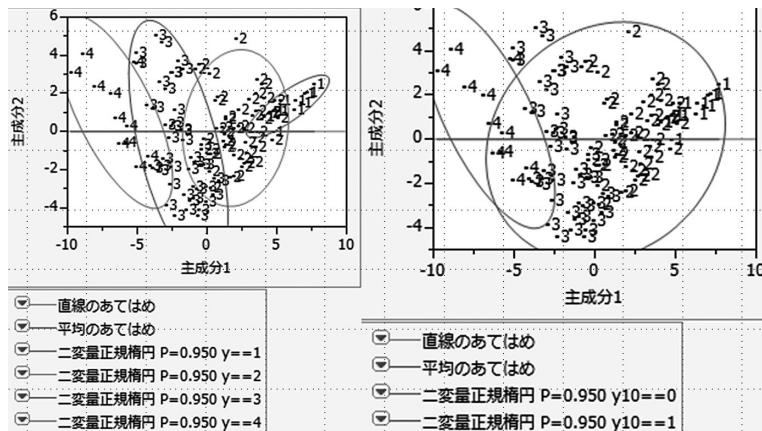


図19 2011年度の期末試験のスコアプロット (4層と10%点)

図20は、2011年度の期末試験の50%点と90%点のスコアプロットである。左図は長軸がほぼ直交し、右図は合格群の半分が不合格群に含まれている。

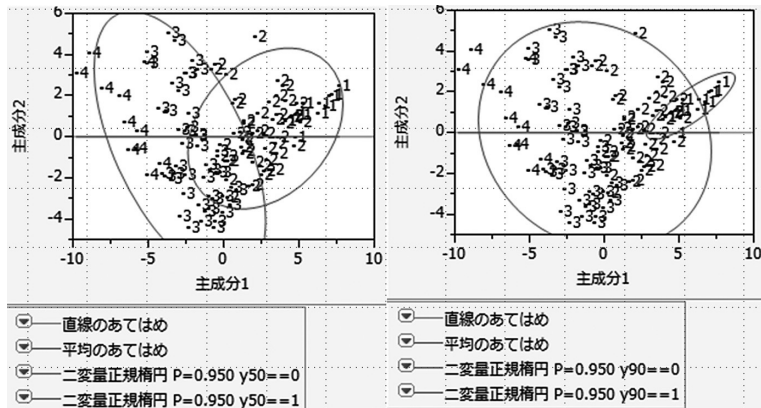


図20 2011年度の期末試験のスコアプロット (50%点と90%点)

図21と図22は、2012年度の中間試験のスコアプロットである。2010年と2011年の期末試験とほぼ同じである。すなわち2010年と2011年の中間試験は、第4層だけが正答数が少ないのに正答パターンが多く、分散共分散が大きくなっている。第3層から第1層になるにつれ正答数が多いが、正答パターンが少なく同一層内の得点差のバラツキが大きくなり第4層に垂直方向に確率楕円の長軸が伸びている。2012年度は、中間試験と期末試験は4層の全てで正答パターンがばらついているようだ。

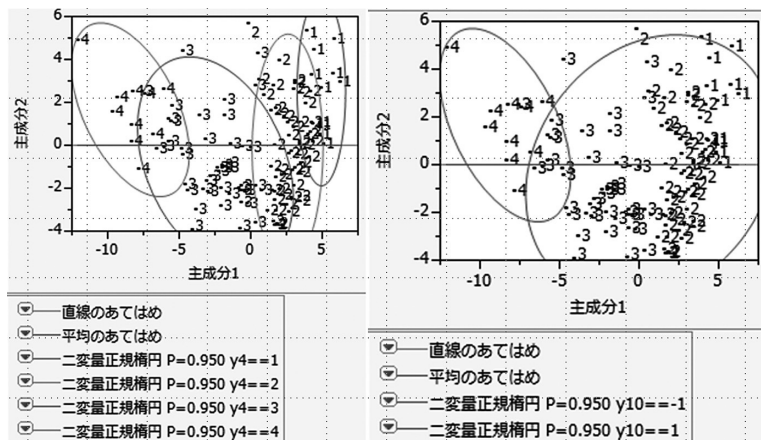


図21 2012年度の中間試験のスコアプロット (4層と10%点)

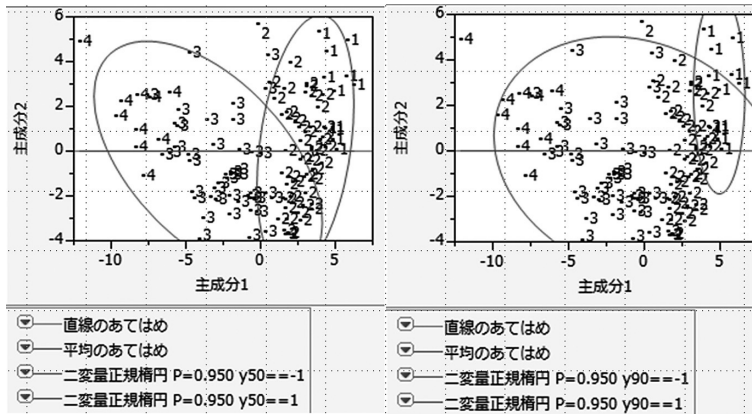


図22 2012年度の中間試験のスコアプロット (50%点と90%)

図23と図24は、2012年度の期末試験のスコアプロットである。2010年と2011年の期末試験と2012年の中間試験とはほぼ同じである。2011年の期末試験で99点を取って成績トップの2人の内の一人の聞き取り調査で、「中間の正規分布が一番難しかった」という意見に引きずられたが、多くの学生にとって、期末は相関係数、単回帰分析、分割表という内容が多様であるので、3年間とも正答パターンが各4層でばらつくと考えた方がよいようだ。

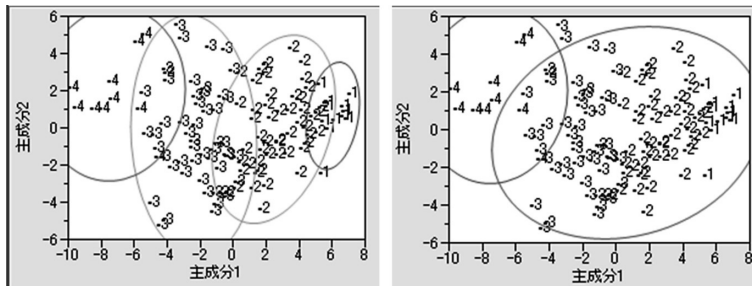


図23 2012年度の期末試験のスコアプロット (4層と10%点)

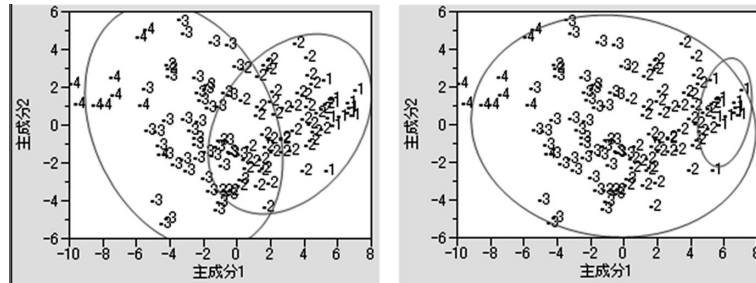


図24 2012年度の期末試験のスコアプロット (50%点と90%)

4. 終わりに

本研究では、2010年から3年間行ってきた統計入門の中間と期末試験の分析を行い、2012年度の中間試験以降の欠席者の増加による影響の分析を行った。また既存の統計的判別関数が、線形分離可能なデータに対応できない問題点があったので、応用研究の手始めにMNM基準による最適線形判別関数と、ロジスティック回帰、LDF、QDFの比較を行ってきた。

2010年1月に、1998年から開始した誤分類数最小化(MNM)基準による最適線形判別関数に関する研究を終了し、10月に研究成果をまとめて[4]を出版した。実は大学卒業後に行った心電図の自動解析システムの診断論理でFisherの線形判別関数にもった疑念が契機である[11]。

2009年秋に評価データでも最適線形判別関数の平均誤分類確率が良いことを示す最後の詰め論文を投稿していたが、アルバイトのTex作業の遅れなどで手間取り、論文が採択された場合は出版後になりそうなので取り下げることにした。また、2011年1月にある研究機関から120個の良質な線形分離可能な研究用のデータを借り受け、実証研究を1年間行い良好な結果を得た。2012年3月以降に研究発表しようと準備をしていたところ、管理部門に研究データ貸し出しの手続きを取っていないだったので外部への発表を控えてほしいという連絡が入り、2012年度は人生最大の悪夢の年になった。

本学では100人以上の受講生がいる科目ではマークセンス試験を行うことができる。単に自分の研究テーマである「試験データの可否判定」だけでなく、統計分析が授業の改善に役立たないかの視点で研究を行ってきた。今回まだ十分でないが、試験データの統計分析で自分の授業に役立つことが分った。今後、学部や大学で統計分析が貢献できると考える。

また、2次判別関数が「合格群の全てを不合格群に誤判別する」理由が、3年間根気よく継続したおかげで表8の10%水準の可否判定で見えてきた。また財城先生の協力で、彼女の行った『環境と科学』の2011年度の40問の試験に、2012年度は10問追加すると、第4層に加え

て第3層の50%点以下の学生の正答パターンがばらつくことが分った [13]。

(成蹊大学経済学部教授)

文献

- [1] 新村秀一 (2004). JMP活用 統計学とっておき勉強法。講談社。
- [2] _____ (2004). パソコンによるデータ解析法。講談社。
- [3] _____ (2009). 数学のできる問題解決学。成蹊大学一般研究報告, 1-52。
- [4] _____ (2010). 最適線形判別関数。日科技連出版社。
- [5] _____ (2011). 合否判定データにおける判別分析の問題点。応用統計学, 3, 157-173。
- [6] _____ (2011). 数理計画法による問題解決法。日科技連出版社。
- [7] _____ (2007). ExcelとLINGOで学ぶ数理計画法。丸善。
- [8] J.Sall他 (2004). JMPを用いた統計およびデータ分析入門。SASジャパン。
- [9] 新村秀一 (2007). JMPによる統計レポート作成法。丸善。
- [10] Firth,D. (1936). Bias reduction of maximum likelihood estimates. Biometrika, 80, 27-38.
- [11] 新村秀一 (2012). Fisherの判別分析を超えて。2012年SASユーザー会論文集, 349-361。
- [12] Shinmura, S. (2011). Beyond Fisher's Linear Discriminant Function-New World of Discriminant Analysis-. ISI 2011. 1-6.
- [13] 財城真寿美, 新村秀一 (2012). 環境と科学試験データの合否判定。日本計算機統計学会第26回シンポジウム。59-62。

Evaluation of Optimal Linear Discriminant Function (3)

- Summary of statistical test evaluation from 2010 to 2012 -