成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.50 No.2 (2013)pp.95-100

粒子法と分布点音源法による超音波浮揚液滴形状解析について

和田 有司*1，弓削 康平*2

On the simulation of an ultrasonic levitated droplet shapes with moving particle semi-implicit and distributed point source method.

Yuji WADA*1, Kohei YUGE*2

ABSTRACT : Numerical simulation of an ultrasonic levitated droplet shape is discussed. In the circumstances of acoustic standing wave, water droplets are trapped at the sound pressure node from the effect of the acoustic radiation force, that is, a static force generated because of acoustic nonlinearity. While trapped near the node, the droplets are experimentally known to change their shapes into spheroid, though, very few report has numerically calculated the shape of the droplet considering the free surface boundary of the droplet. In this report, authors successfully simulate the two-dimensional shape of the droplet using distributed point source method (DPSM) and moving particle semi-implicit (MPS) method.

Keywords : Ultrasonic levitation, Acoustic radiation force, Particle method, Point source method, Surface tension

(Received September 20, 2013)

1．はじめに

近年，微小物体の非接触搬送技術として超音波を用いた浮揚技術が注目されている。これは定在波音場中に微小物体を配置すると音響放射力により音圧の節に捕捉される現象を利用したものである。液滴の浮揚についても多くの実験報告がなされており，一次元定在波音場中に液滴を浮揚させると回転楕円体状になることが知られている[1,2]。しかしながら，計算格子を用いた計算手法で超音波と液滴自由表面を扱うのは処理が煩雑であり，浮揚した液滴形状を数値計算で求めた報告例はほとんどない。

本研究は計算格子を持たない計算手法である音場計算法である分布点音源法(Distributed Point Source Method, DPSM) [3]と，同じく計算格子を持たない非圧縮性流体計算手法であるMPS粒子法 (Moving Particle Semi-implicit) [4]を組み合わせて，浮揚液滴形状をシミュレーションすることを目的とする。

*1：理工学部システムデザイン学科 助教
(yuji.wada@st.seikei.ac.jp)
*2：理工学部システムデザイン学科 教授

2．液滴浮揚の原理

非線形音場中では圧力に直流分が発生することが知られており，その大きさは音の位置エネルギーと運動エネルギーの差で表される[5, 6]。

$$P_a = \langle e_p \rangle - \langle e_k \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2\rho_0 c^2} - \frac{\rho_0 \langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} \qquad (1)$$
$$\mathbf{F} = \iint_\Gamma P_a \mathbf{n} dS$$

ただし，<…>は時間平均の操作を示す。
液滴に働く力はこの時間平均圧力を液滴表面Γで面積分することで求めることができる。

Fig. 1 に 1 次元空中定在波音場中で液滴を音圧の節付近で浮揚させた場合の液滴に働く力についてまとめた図を示す。液滴にはこの時間平均圧力Pa以外に表面張力と重力がはたらく。時間平均圧力のおおよその分布として，液滴の上面と下面では粒子速度が遮られるため位置エネルギーが主となり正圧，側面は音圧の節であるため運動エネルギーが主となり負圧が予想される。

このとき垂直方向の力の釣り合いから，液滴は上面と

下面の時間平均圧力の差と重力が等しくなるような音圧の節の少々下に留まる。また水平方向の力の釣り合いから，時間平均圧力の負圧と表面張力が等しくなるように液滴の曲率が変化し，液滴は楕円形になることが予想される。

しかしながら，液滴形状の変化により周囲の音場が変化するため，実際の液滴形状を求めるには逐次音場計算と液滴の形状変化を再現するようなシミュレーション方法が求められる。

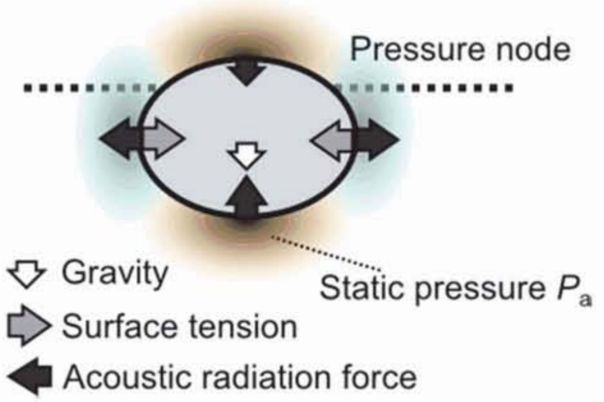

Fig. 1 Forces act on an ultrasonic levitated droplet.

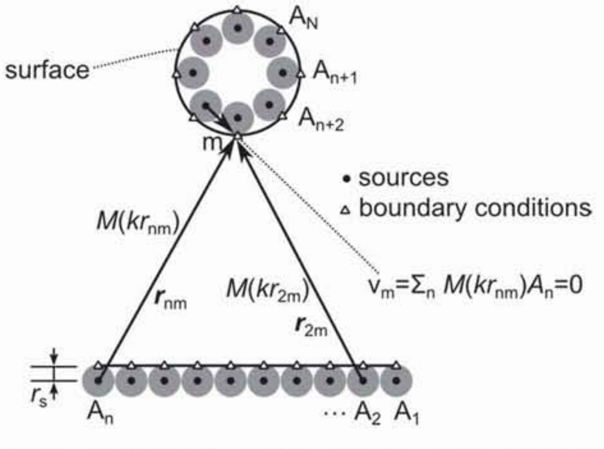

Fig. 2 Distributed point sources and boundary conditions.

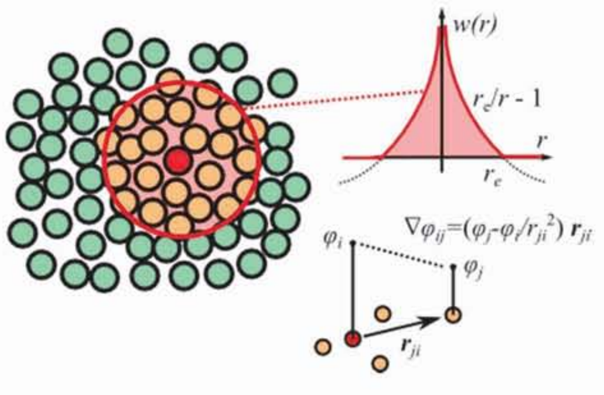

Fig. 3 Moving particle semi-implicit method window and gradient.

3．分布音源法(DPSM)について[3]

本解析のように時間経過に従って境界位置が変動するような移動境界を持つ計算を考える場合，計算格子を使用する方法では境界検出用関数の配置や格子の再生成など手間が煩雑となる場合が多い。これに対してDPSM（分布点音源法）は境界に点音源を分布させるだけで，節点結合等のメッシュ生成なしに空間音場を計算する方法である。

一般に速度Vで振動する任意の振動板から放射される音場はGreen関数を用いて式(2)のレイリー積分により計算できる。

$$p=\frac{j\omega\rho}{2\pi}\iint VG(kr)dS \fallingdotseq \sum_n^N G(kr)A_n$$
$$A=\frac{j\omega\rho}{2\pi}V\Delta S \tag{2}$$
$$G(kr)=J_0(kr)-jY_0(kr)$$

なお，本報告では二次元音場を対象とするためGreen関数はハンケル関数である。離散領域で数値積分する場合振動板の微小面積領域はある振幅Aの点音源と置き換えることができる。しかしながら，反射体など二次音源が存在する場合レイリー積分のみでは音場の計算は不可能である。

Fig. 2にDPSMの計算の模式図を示す。まず一次音源と反射板や液滴などの二次音源すべてに，音源振幅Aが未知であるN個の点音源を分布させる。ただし，音源は擬似的に半径r_sの球(二次元では円筒)であるものとし，音源の中心は境界からr_sだけ内側に配置するものとする。
未知音源群A_nから放射された音波が位置mに形成する音圧および法線ベクトル$\mathbf{n}$方向の粒子速度は式(3)で計算できる。

$$p_m=\sum_n^N G(kr_{mn})A_n$$
$$v_m=-\sum_n^N \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{mn}}{j\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\sum_n^N M(kr_{mn})A_n \tag{3}$$

境界条件としては一次音源表面で速度V_0，反射板で速度0，簡単のため液滴表面は音響的に剛体として速度0とする。この式を用いて音源表面の各点における境界条件を考えるとN個の未知音源に対して，N個の方程式ができるので未知音源の振幅を決定できる。

$$\{A_n\}=\left[M_{mn}\right]^{-1}\{V_m\}$$
$$\{V_m\}={}^t\{V_0,\cdots,V_0,0,\cdots,0\} \tag{4}$$

音源振幅が決定した後は式(3)から任意の位置の音圧・粒子速度が手に入るため，液滴表面で音圧と粒子速度を計算すれば，式(1)により液滴表面の時間平均圧力P_aを算出することができる。

4．MPS粒子法について[4]

音場からの時間平均圧力を受けた液滴流体の形状変化には，同じく計算格子の必要のない粒子法で計算行う。

粒子法は流体の流れを空間格子ではなく散布された粒子の相互作用により計算する手法であり，MPS法の他にもSPH法や格子ボルツマン法などが知られている。Fig.3にMPS粒子法の模式図を示す。

MPS法の特徴である粒子iの有する物理量ϕの空間勾配の計算は以下の式のように表される。

$$\nabla\phi_i = \frac{D}{d^0}\sum_{i\neq j}\left[\frac{\phi_j-\phi_i}{r_{ji}^2}\mathbf{r}_{ji}w(r_{ji})\right] \tag{5}$$

D=2 は次元数，$w(r)$は重み関数，d^0 は初期配置における粒子密度であり式(6)で計算される。

$$w(r)=\begin{cases} r_e/r-1 & (0<r<r_e) \\ 0 & (r_e\le r)\end{cases}$$
$$d_i=\sum_{i\neq j}w(r_{ji}) \tag{6}$$

r_eはMPS法の影響半径である。

式(7)に粒子法の非圧縮性流体方程式の支配方程式を示す。粒子法は流体とともに移動するラグランジュ法であるため対流項を計算する必要がない。

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{\nabla P}{\rho_w}-\nu\nabla^2U+g+\frac{\sigma}{\rho_w}\kappa\mathbf{n} \tag{7}$$

g, σ, κ, $\mathbf{n}$は重力加速度，表面張力定数，表面の曲率，表面の法線ベクトルである。支配方程式をSMAC法と同様，半陰的アルゴリズムを適用することで過渡流体計算を実行する。

5．計算モデル

Fig.4 に計算領域の設定および使用した材料定数を示す。図のような幅が二波長，高さ一波長の定在波音場中に初期半径 1/20 波長の液滴を浮揚させる場合を考える。下面振動子を 20 kHz，振動速度 1 m/sで振動させ振動板から一波長の位置に剛体反射板を配置する。振動板からおよそ 3/4 波長=12.7 mmの位置の音圧の節位置に浮揚さ

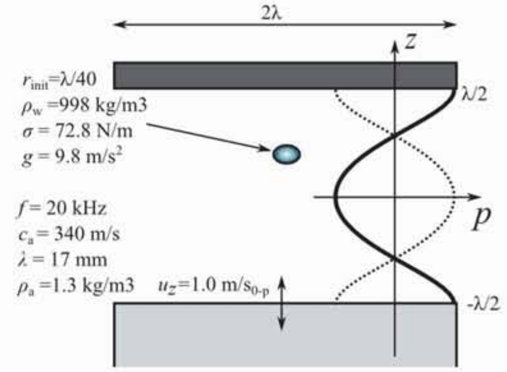

Fig.4 Problem geometry for an ultrasonic levitated droplet.

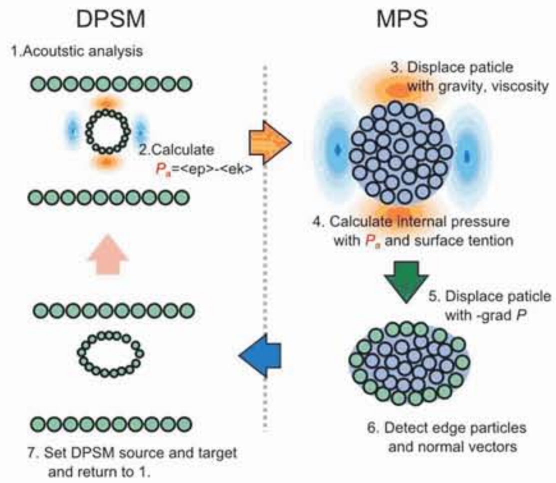

Fig.5 Calculation procedure for DPSM-MPS interaction analysis

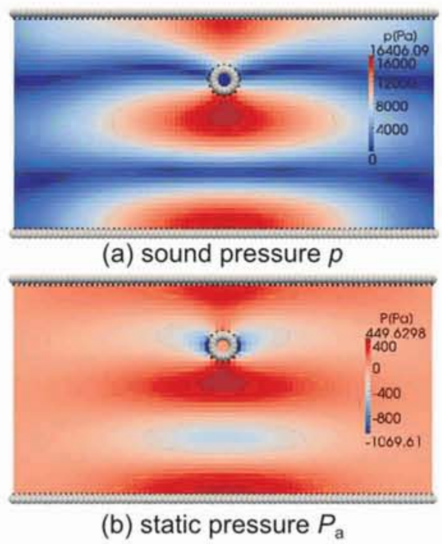

Fig.6 (a) Sound pressure and (b) static pressure distribution with initial radius of λ/40, where the black and white spheres are DPSM boundary condition point and DPSM source, respectively.

せることを考え，円形の粒子群をこの近傍である振動板から 12 mmおよび 13 mmの位置に配置した後シミュレーションでその位置と形状を計算する。初期液滴半径はλ/40 の他にλ/35, λ/45, λ/55, λ/65 の場合について検討を行った。

DPSMは音源の半径r_sを振動板・反射板ではλ/30, 粒子表面ではλ/300 とし，処理の単純化のために液滴表面は音響的には剛壁であるものとした。また，粒子法においては初期粒子間隔をλ/300，影響半径r_eを初期粒子間隔の 4 倍とし，計算の安定のために実際の水より 100 倍大きな粘性定数と 0.01/dt [1/s]の速度に比例する空気抵抗を使用した。

5．連成解析手法

MPS法で検出した粒子配置境界の検出については粒子密度が初期密度に対して閾値β=0.8 より小さな点を境界粒子とし[4]，下式から表面の法線ベクトルは算出可能である。

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{j\neq i} \mathbf{r}_{ji} w(r_{ji})}{\left|\sum_{j\neq i} \mathbf{r}_{ji} w(r_{ji})\right|} \quad (for\ d_i < \beta d^0) \tag{8}$$

境界として検出した粒子の位置をDPSM点音源の位置とし，DPSMにおける気液界面の位置は点音源から$\mathbf{n}$の方向にr_sだけ進んだ位置をDPSMの境界点とする。

DPSMで音場を計算し算出した時間平均圧力P_aの入力については，SMAC法の圧力計算におけるポアソン方程式への境界条件として入力する。

$$\nabla P^2 = \frac{\rho_w \nabla\cdot U}{\Delta t} - \alpha \frac{\rho_w}{\Delta t^2}\frac{d-d^0}{d^0}$$
$$P = P_a + \sigma\kappa \quad (for\ P \in \Gamma) \tag{9}$$

ただし，α=0.07 は粒子密度調整用パラメータである。

過渡解析はdt=50 μs刻みで行い，解析時間は 600 ステップ(30 ms)の間とした。1 ステップあたりにおける液滴形状の変化の少なさと計算負荷の低減のため，DPSMによる音場の計算は 20 ステップごととした。

なお，表面張力の算出に必要な曲率κは，周囲の境界粒子の位置ベクトルと法線ベクトル，接線ベクトル$\mathbf{n}$, $\mathbf{l}$を用いて，関数の曲率の式に従い下式(10)から算出した。

$$\kappa_i = \frac{\sum_{(j\in\Gamma)\neq i} 2\frac{(\mathbf{r}_{ji}\cdot\mathbf{n})}{(\mathbf{r}_{ji}\cdot\mathbf{l})} w(r_{ij})}{\sum_{(j\in\Gamma)\neq i} w(r_{ij})} \tag{10}$$

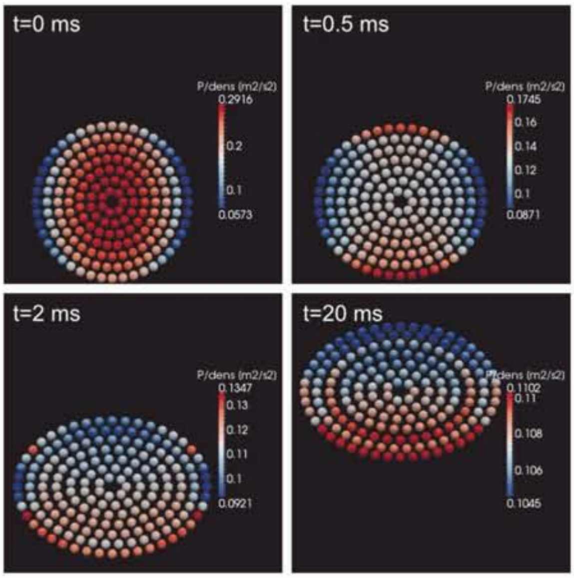

Fig. 7 Droplet deformation and internal pressure at the time 0, 0.5, 2, 20 ms with initial radius of λ/40.

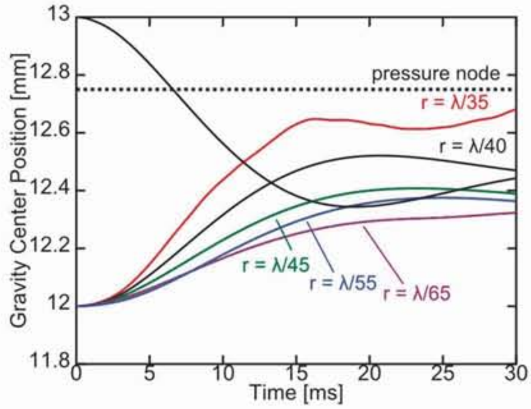

Fig. 8 Time variation of the gravity center position of the droplet with various initial radii.

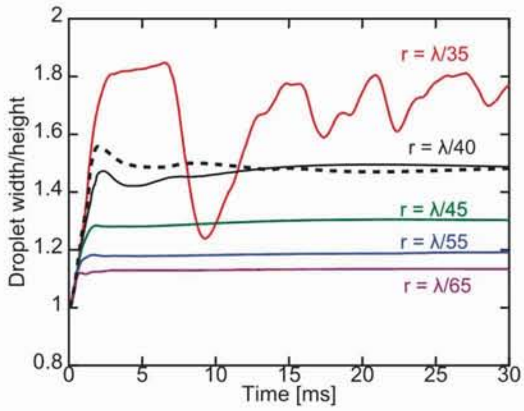

Fig. 9 Time variation of the ratio of width to height of the droplet with various initial radius.

６．結果

Fig. 6 に初期計算時間における音圧・定常静圧分布を示す。図中の白い球はDPSM音源の位置，黒い点はDPSMにおける境界条件の点を示している。定在波音場の振幅は 16 kPaであり，この時の時間平均圧力は垂直方向で 400 Paの正圧，水平方向で 1 kPaの負圧となった。この場合垂直方向正圧により粒子は上方向に押し上げられ，水平方向負圧により粒子が扁平になることが予想される。

Fig.7 にt=0, 0.5, 2, 20 msにおける粒子配置の変化と内部圧力の変化を示す。時間平均圧力を受けた粒子は早い段階で扁平に変形した後，音圧の節に押し上げられる様子が見て取れる。また，初期時間において全体と比較して負圧であった液滴の左右の静圧場が時間の経過とともに，扁平に変化することで表面張力がこの負圧と釣り合い，t=20 msにおいては液滴左右部分と中心部での静圧が一致している。

Fig.8 に粒子の高さ方向重心位置の時間経過による変化を示す。音圧の節の上下どちらから投下した場合でも初期半径がλ/40 で同じ場合，時間経過により粒子は音圧の節の 0.25 mm下方の 12.5 mmに捕捉された。また，初期液滴半径つまり液滴の体積が小さいほど音圧の節から離れた位置に捕捉される結果が得られた。この理由としては体積が大きい分，扁平になることで音場からより大きな放射圧を受けることができるようになり，この放射圧の増分が総質量増加による重力の増加を上回ったものと考えられる。また初期半径λ/35 の場合は水平方向の負圧が大きくなり液滴が極端な扁平形状になるためか，粒子群が左右非対称な動きを見せる結果が得られた。

Fig.9 に浮揚液滴の幅と高さの比の時間経過による変化を示す。初期液滴半径が大きい場合ほど扁平な楕円形状となる結果が得られた。これは初期液滴半径が小さいほど初期状態における表面張力が大きく，形状を変化させて左右方向の負圧と釣り合わせる必要がなくなるためと考えられる。

７．結論

本研究は液滴を超音波浮揚させた場合に形状が扁平になるこれまでの実験事実について，計算格子を持たない計算手法である音場計算法であるDPSM法，および同じく計算格子を持たない非圧縮性流体計算手法であるMPS粒子法を組み合わせて，二次元空間上で超音波浮揚液滴のシミュレーションを行った。その結果，音場の時間平均圧力の効果により液滴が扁平に変形し，音圧の節より下方にトラップされることを再現することができた。

今後の課題としては，三次元空間上での粒子形状および水平方向に発生する音響流のシミュレーション，および，大粒径・大音圧時における液滴の分裂などのシミュレーションに対する検討が挙げられる。

参考文献

[1] 大塚，瀬谷: 日本音響学会春季研究発表会講演論文集 pp.891-892 (1995.3)

[2] 大塚，中根: 日本音響学会春季研究発表会講演論文集 pp.1121-1122 (2002.3)

[3] D. Placko and T. Kundu, Eds,, "DPSM for Modeling Engineering Problems", 1st edition (Wiley-Interscience) (2007).

[4] 越塚誠一: “計算力学レクチャーシリーズ(5) 粒子法” (丸善, 2005)

[5] W.L. Nyborg: J. Acoust. Soc. Am. **42** (1967) 947-952.

[6] 藤田，羽田野: 日本音響学会春季研究発表会講演論文集 pp.1023-1024 (1996.3)