成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.52 No.2 (2015)pp.11-12

球面上の四角形分割のマイナー関係について

松本　直己*

Minor relation for quadrangulations on the sphere

Naoki MATSUMOTO*

ABSTRACT : We present a minor relation for quadrangulations on the sphere. It is known that minor operations might transform a quadrangulation into another graph which is not a quadrangulation. We introduce new transformations for quadrangulations, where they consist of a sequence of minor operations. Then we find a sequence of quadrangulations G=G0, G1, G2, … , Gk=C4 (a 4-cycle), where Gi+1 is obtained from Gi by an application of one of our operations.

Keywords : graphs, quadrangulations, minor, generating theorem

(受理年月日：2014 年 7 月)

1．はじめに

グラフ・マイナー理論とは，Robertson-Seymourによって体系化されたグラフ理論における重要な理論のひとつである．Robertson-Seymourによる計 20 編以上からなる論文集 Graph Minorsにおいて，彼らは数々の重要なマイナーに関する定理を証明している．その中でも特に有名なのは,「マイナー関係に関して閉じているグラフの集合は，有限個の禁止マイナーによって特徴付けられる」という定理である．これにより，様々なグラフのクラスにおいて，禁止マイナーによる特徴付けやマイナー操作によるグラフの生成定理などが証明されてきた．しかし，一般にマイナー操作はグラフの染色数を保存しないことなどから，グラフのマイナー操作は二部グラフに対してはあまり相性が良くないと考えられてきた． 実際，二部グラフのマイナーに関してはあまり研究が進んでいない．

一方で，ある閉曲面S上に辺の交差なく描くことができるグラフ全体の集合は，マイナーに関して閉じていることが知られている．したがって，これまでに平面的グラフの特徴づけとして有名なKuratowskiの定理をはじめとする様々な曲面上のグラフのマイナー関係に関する定理が証明されてきた．しかしながら，一般のグラフと同様に，曲面上の二部グラフに関する研究はほとんどされてこなかった．

そこで我々は，二部グラフである球面上の四角形分割において，マイナー操作を組み合わせて得られる新たな局所変形を四角形分割に対して定義し，それらの変形による球面四角形分割におけるマイナー関係を発見した．

*：理工学部情報科学科助教 (naoki-matsumoto@st.seikei.ac.jp)

2．準備

グラフGとは，有限集合（頂点集合）Vとその二元部分集合族（辺集合）Eとの組である．球面上に辺の交差なく描かれた各面が 4 -サイクルグラフC_4（図 1）で囲まれているグラフのことを四角形分割と呼ぶ（図 2）．また，任意の四角形分割は二部グラフであることが知られていることから，以降，四角形分割の頂点を黒と白で図 1, 2 のように塗り分けておく．

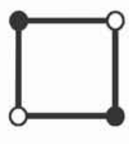

図１　4-サイクルグラフC_4

図２　四角形分割の例

グラフのマイナー操作とは，図 3 で示される「辺の除去，辺の縮約，孤立点の除去」からなる三つの変形操作である．あるグラフGからこれらの操作の連続によって異なるグラフHに変形できたとき，HはGのマイナーである

という．

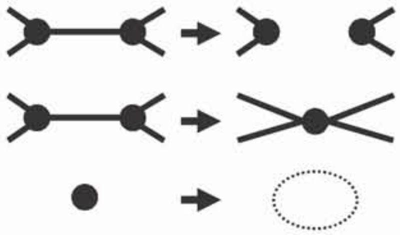

図３　マイナー操作（上から辺の除去，縮約，孤立点除去）

３．主結果

第１章で述べたように，これまでグラフ・マイナー理論では二部グラフのマイナー関係についての研究があまりされてこなかった．そこで我々はまず二部グラフのひとつである四角形分割全体のマイナー関係を明らかにしようと考えた．しかしながら，図３からも明らかなように，一般にマイナー操作は与えられたグラフが四角形分割であることを保存しない．また，任意の四角形分割は面縮約（図４）という減少操作によりC_4に変形できることが知られているが[2]，面縮約は一般にはマイナー関係を保存しないこともわかっている[1]．

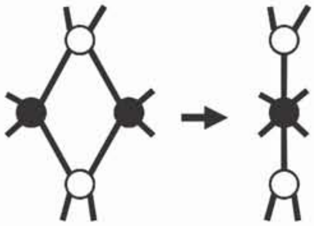

図４　面縮約

そこで我々は，四角形分割のマイナー関係を考えるため，四角形分割であることを保存するような二つの新しい変形（hexagonal-contraction, 2-vertex removal，図５）を定義し，任意の四角形分割がこの二つの変形によってC_4に変形できることを証明した．(この二つの変形が図３で表している三つのマイナー操作を何回か適用すると得られることは比較的簡単に分かる．)

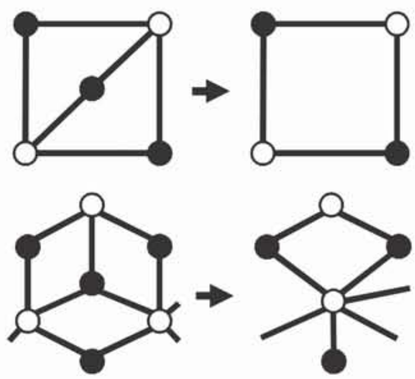

図５（上から）2-vertex removalとhexagonal contraction

定理１ (Bau et al. [1])．任意の四角形分割Gに対し，以下の二つの条件(i), (ii)を満たす四角形分割の列$G = G_0, G_1, G_2, \ldots, G_k = C_4$が存在する．

(i) 任意の$i < j$について，G_jはG_iのマイナーである．

(ii) G_{i+1}はG_iからhexagonal contractionか 2-vertex removalによって得られる．

この定理によって四角形分割全体に対し，ひとつのマイナー関係を定めることに成功し，二部グラフにおけるグラフ・マイナー理論の構築に貢献することができた．今後は，本定理の他の曲面への拡張も含めた曲面上の二部グラフにおけるマイナー関係に関する理論をより発展させていきたいと考えている．

参考文献

[1] Minor relations for quadrangulations on the sphere, S. Bau, N. Matsumoto, A. Nakamoto and L. Zheng, to appear in Graphs and Combinatorics.

[2] Diagonal transformations of graphs on closed surfaces, S. Negami and A. Nakamoto, Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ., Sec I, 40 (1993) 71–97.