

薄板で構成された箱形断面梁の
座屈に関する研究

Studies on the buckling of the box beam composed
of thin plates

2016年3月

古巢克也

目次

| | |
|-----------------------------------|----|
| 第1章 序論 | 9 |
| 1.1 研究背景 | 9 |
| 1.2 薄板構造の座屈および座屈後挙動に関する研究動向 | 11 |
| 1.3 本研究の目的 | 15 |
| 第2章 薄板構造の座屈に関する過去の研究概要 | 19 |
| 2.1 本章の目的 | 19 |
| 2.2 長方形平板の座屈 | 19 |
| 2.2.1 平板の座屈方程式 | 19 |
| 2.2.2 圧縮座屈 | 21 |
| 2.2.3 せん断座屈 | 22 |
| 2.2.4 曲げ座屈 | 23 |
| 2.3 平板の座屈応力関係式 | 25 |
| 2.4 箱形断面梁の座屈 | 26 |
| 2.5 まとめ | 27 |
| 第3章 ねじりトルクによる座屈 | 35 |
| 3.1 過去の研究と本章の目的 | 35 |
| 3.2 梁のねじりにおける基礎関係式 | 36 |

| | | |
|-------|--------------------------------|----|
| 3.3 | ねじり座屈時のせん断応力のエネルギー法による導出 | 37 |
| 3.4 | 対称性を考慮したせん断座屈応力係数の近似解 | 42 |
| 3.5 | FEMによる検証 | 43 |
| 3.6 | まとめ | 45 |
| 第4章 | 曲げモーメントによる座屈 | 51 |
| 4.1 | 過去の研究と本章の目的 | 51 |
| 4.2 | 四面を単独の面として考えた場合の曲げ座屈応力 | 52 |
| 4.3 | 三面が同時に座屈すると考えた場合の曲げ座屈応力 | 54 |
| 4.3.1 | 一項近似 | 57 |
| 4.3.2 | 二項近似 | 58 |
| 4.4 | 圧縮座屈を主として考える場合 | 58 |
| 4.5 | 曲げ座屈を主として考える場合 | 62 |
| 4.6 | 検証計算と考察 | 63 |
| 4.6.1 | 有限要素法 (FEM) による計算結果 | 63 |
| 4.6.2 | 結果の比較 | 64 |
| 4.6.3 | 考察 | 65 |
| 4.7 | まとめ | 67 |
| 第5章 | 圧縮とねじりが複合した座屈 | 75 |

| | |
|--------------------------------------|-----|
| 5.1 過去の研究と本章の目的 | 75 |
| 5.2 エネルギー法に基づく平板の複合荷重時の座屈応力関係式 | 76 |
| 5.2.1 圧縮とせん断 | 76 |
| 5.2.2 曲げとせん断 | 79 |
| 5.2.3 圧縮と曲げ | 82 |
| 5.2.4 座屈応力関係式の類似性 | 84 |
| 5.2.5 平板の座屈応力関係式に関するまとめ | 86 |
| 5.3 箱形断面梁の軸方向圧縮座屈 | 87 |
| 5.3.1 座屈応力係数の近似式 | 87 |
| 5.3.2 比較と検証 | 89 |
| 5.4 箱形断面梁の圧縮とねじりの座屈応力関係式 | 90 |
| 5.4.1 座屈応力関係式の候補 | 90 |
| 5.4.2 FEMとの比較 | 91 |
| 5.4.3 考察 | 92 |
| 5.5 まとめ | 94 |
| 第6章 結論 | 105 |

目次

| | |
|--|----|
| Fig. 1.1 Exmample of automobile main frame structure. | 17 |
| Fig. 2.1 Schematic diagram of rectangular plate for out-of-plane load. | 28 |
| Fig. 2.2 Schematic diagram of rectangular plate at buckling for in-plane load. | 28 |
| Fig. 2.3 Schematic diagram of rectangular plate for compression. | 29 |
| Fig. 2.4 Compression buckling stress coefficient of rectangular plate. | 29 |
| Fig. 2.5 Schematic diagram of rectangular plate for shear. | 30 |
| Fig. 2.6 Shear buckling stress coefficient of rectangular plate. | 30 |
| Fig. 2.7 Schematic diagram of rectangular plate for bending. | 31 |
| Fig. 2.8 Bending buckling stress coefficient of rectangular plate. | 31 |
| Fig. 2.9 Schematic diagram of rectangular plate for combined stress. | 32 |
| Fig. 2.10 Schematic diagram of box beam for compression. | 32 |
| Fig. 2.11 Buckling stress coefficient vs. aspect ratio of cross-section of box beam for compression (Kurauchi, 1935b). | 33 |
| Fig. 2.12 Buckling stress relationship curve of square box beam for compression and torsion (Wittrick, 1968b). | 33 |
| Fig. 3.1 Schematic diagram of box beam for torsion. | 47 |
| Fig. 3.2 Outline of finite element model of box beam. | 47 |

| | |
|--|----|
| Fig. 3.3 Examples of buckling mode for torsion by FEM..... | 48 |
| Fig. 3.4 Torsional buckling stress of all dimensions by FEM. | 48 |
| Fig. 3.5 Error distribution of shear buckling stress vs. aspect ratio of cross section. | 49 |
| Fig. 3.6 Error distribution of shear buckling stress by Eq. (3.35). | 49 |
| Fig. 3.7 Comparison of buckling stresses by FEM, plate theory, and current method... | 50 |
| Fig. 4.1 Schematic view of box beam for bending..... | 69 |
| Fig. 4.2 Schematic view of deflection of cross-section of box beam in case of $h/b > 0.409$ | 69 |
| Fig. 4.3 Outline of finite element model of box beam. | 70 |
| Fig. 4.4 Example results of bending buckling mode by FEM..... | 70 |
| Fig. 4.5 Bending buckling stress of all dimensions by FEM..... | 71 |
| Fig. 4.6 Comparison of bending buckling stress by FEM, and Plate theory. | 71 |
| Fig. 4.7 Comparison of buckling stress coefficients derived by all equations from energy method with FEM results and plate theory. | 72 |
| Fig. 4.8 Comparison of buckling stress coefficients from equation (4.50) and FEM. ... | 72 |
| Fig. 4.9 Comparison of buckling stress example using equation (4.50) with FEM results..... | 73 |
| Fig. 5.1 Schematic diagram of rectangular plate for combined stress..... | 95 |

| | |
|--|-----|
| Fig. 5.2 Variation of buckling stress relation equations with parameter c | 95 |
| Fig. 5.3 Schematic view of box beam for compression..... | 96 |
| Fig. 5.4 Outline of finite element model of box beam. | 96 |
| Fig. 5.5 Example of buckling mode by FEM | 97 |
| Fig. 5.6 Example of buckling mode by FEM | 98 |
| Fig. 5.7 Schematic view of box beam for compression and torsion..... | 98 |
| Fig. 5.8 Example of buckling mode by FEM | 99 |
| Fig. 5.9 Buckling stress along stress ratio by FEM..... | 100 |
| Fig. 5.10 Comparison of buckling stress relation equations with results from FEM. ... | 100 |
| Fig. 5.11 Difference of stress ratio by Eq. (5.68) to results from FEM..... | 101 |
| Fig. 5.12 Comparison of buckling relation equation with $c=-1/4$ with results from FEM. | 101 |
| Fig. 5.13 Comparison of buckling relation equation with $c=-1/4$ and curve written by Wittrick (1968b) with results from FEM..... | 102 |

第1章 序論

1.1 研究背景

自動車の車体構造設計・開発において、近年、有限要素法(FEM, Finite Element Method)に代表されるCAE (Computer Aided Engineering)がますます重要となっている。自動車の剛性や衝突解析に関して、計算機性能の向上により車両全体の計算モデルを作成して、計算解析することも可能となってきた。

自動車車体構造の中で、骨格は自動車の車体構造の根幹をなし、自動車を形作る重要部位である。骨格の一例をFig. 1.1に示すが、例えば自動車が衝突を受けたときこれら骨格には、その衝突の方向に応じて曲げモーメントやねじりトルク、軸圧縮力、およびそれらが複合した荷重が作用することになる。

この骨格部の開発は、最初に概念設計を行うことから始まる。開発する車両に対し、従来モデルや様々な試験から必要とされる耐荷重を想定し、骨格を構成する板の材質や板厚、断面の形状を決定する。詳細設計の段階で、断面の最終形状、骨格形状を作成する。そののち、その設計図面をもとに計算用モデルを作成し、CAEにより評価を実施する。この評価により、性能が目標に対して充分ではないと判断されれば、再び詳細設計図面に立ち戻ることになり、目標

を達成するまでこの手順が繰り返される。近年では、このCAEによる評価の手順の自動化が進んでおり、CAEに造詣が深くなくても答えが得られるようなシステムが形成されつつある。

しかし、これらの手順では時間とコストが多大となり、解を得るための過程がブラックボックスとなる。そのため、解析技術の空洞化が懸念され、また得られた結果の正誤の判断が難しくなる。このような懸念を払拭するために、詳細な設計前の初期設計段階において、骨格の概略的な剛性・強度を見積もり、素性の良い概念設計をすることが重要である。

軽量化のため、自動車に用いられる素材として複合材料や樹脂材料が使われるようになってきているが、それでも車体骨格では基本的には鉄鋼材料を用いることが主流であり、鉄鋼材料に関しても近年、高強度鋼の開発が進んでいる。そして、強度を保ちつつ軽量化を図るため、この高強度鋼板の利用が多くなり、かつ鋼板が薄くなってきている。

従来、車体骨格の静的強度や衝突性能を考慮した前述の初期概念設計において、骨格を構成する断面の全塑性力を評価し断面形状を決定する方法が用いられていた。この全塑性力による評価尺度では、断面を構成する鋼板が全て有効に活用され、全鋼板が降伏応力状態になるところを耐力としている。しかし、薄い鋼板で構成された骨格に様々な外力が作用する場合、厚板とは異なり、薄

板で発生しやすい弾性座屈を考慮しなくてはならない。弾性座屈が発生すると、板面内の応力が一様ではなくなり分布を有するため、同じ外力が作用する場合に、一様な応力であるときよりも板に発生する最大応力が高くなる。全塑性力による評価尺度では一様な応力であることを前提としているため、弾性座屈が発生する薄板構造では、弾性座屈を考慮した評価尺度を利用する必要がある。弾性座屈に伴う耐力や剛性の低下を見積もり評価尺度を構築するためには、弾性座屈応力や座屈後の応力分布や変形を知ることが必要である。

前述の通り、CAEを利用することによりこれらの諸量に関して高精度な結果を得ることが可能であるが、設計の初期段階においては詳細な車両の形状が確定していないことが多いため、CAEのための計算モデル（有限要素メッシュ）を作成することが難しい。逆に、詳細な形状が確定した後で設計要件を満たさないことがわかって、基本形状の設計を変更することが容易ではない。

以上の通り、自動車車体の骨格の強度すなわち耐力を初期設計時に見積もるためには、弾性座屈の発生と座屈後の挙動を明確にすることが重要である。

1.2 薄板構造の座屈および座屈後挙動に関する研究動向

平板の座屈に関しては、過去に多くの研究がなされている。長方形平板に関しては、圧縮、せん断、曲げの応力が作用する場合の座屈応力を求める方法が

多くの書籍にまとめられている (Timoshenko, 1961, 長柱研究委員会編, 1961, 林, 1966, CRC of Japan, 1971, 新沢順悦, 1989, 桑村, 2001, 2002, 宇佐美編, 2005, 日本機械学会, 2005, 2007, Ziemian, 2010, 小林, 2014). 周辺単純支持の平板の圧縮座屈に関しては, 平板の撓み方程式を解析的に解くことによって座屈応力を求めることが可能である. 曲げ座屈やせん断座屈に関しては, 正弦波形の無限級数で表される座屈変位形状を仮定して, エネルギー法 (酒井, 1948, 赤坂, 2000) により精度のよい近似解を得ることができる.

単純支持のみならず, 固定されている場合や, 辺によって異なる境界条件を有する場合に関して多くの研究事例がある (Lundquist, 1942a, 1942b, Aldie, 1951,). また, 圧縮とせん断, 曲げの応力が複合して作用する場合の座屈に関しても多くの研究事例がある (Chwalla, 1936, 武藤, 1941, Iguchi, 1938a, 1938b, Johnson, 1951, Gerard, 1957, 五十嵐, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d).

薄板構造の耐力を求めるためには, 座屈応力のみならず座屈後の挙動を知る必要があり, その考え方の一つとして弾性座屈を考慮した有効幅理論がある (Karman, 1932, Yu, 2000). 平板に圧縮座屈が発生した場合, 圧縮方向の応力は一定ではなくある分布を有するが, Karmanはその圧縮応力に対して, 最大応力と同じ応力が生じているような仮想的な幅を有効幅として定義した. Marguerre (1937) はKarmanが提唱した式以外の有効幅の考え方を示している. 有効幅に

よる解析機能を有するソフトウェア (AISI/CARS 2002, 2002, CARS manual, 2002) が市販されており, 弾性座屈を考慮して耐力を見積もる方法が提案されている.

周囲の辺の面内変位を直線拘束された単純支持の正方形平板に関して, 有効幅理論を直接的に用いることなく平板の大撓みの方程式 (小林, 1987) にエネルギー法 (Galerkin法) を適用し応力関数を利用して, 圧縮座屈後の応力分布と荷重変位関係を求める方法 (邊, 1976, 小林, 2014) が示されている. また, 半谷 (1995) は, 境界の側辺 (圧縮軸に平行な辺) の, 面内変位を拘束した単純支持の正方形平板に対して, 摂動法 (柴田正和, 2009) により圧縮座屈後の応力分布および荷重変位関係を求める方法を記した. Dombourian (1976) も, 3方向の変位を2項の正弦波形, 計6自由度で表して, 摂動法により圧縮座屈後挙動を求める方法を示した.

Karmanの有効幅理論をはじめとして通常, 有効幅は圧縮座屈後に対して定義されているが, この圧縮の有効幅の概念を拡張して, 面内曲げやせん断について考察した例 (木村, 2001a), 初期不整や様々な境界条件を考慮した例 (八巻, 1960, 1961) がある. それに対し若杉 (1953, 1970) は, 正方形平板に関して, 有効幅理論を用いることなく前述の小林と同様に, 平板の撓み方程式から Galerkin法を適用しかつ4項の正弦波形を利用して, せん断座屈後の応力分布と荷重変位関係を求めた.

せん断座屈後においては、せん断特有の張力場（近藤, 1938, Schapitz, 1966, Mansfield, 1968）を考慮することが必要となる場合がある。Kuhn（1956）は張力場係数を導入して、座屈後の張力場の発達程度を表した（林, 1966）。また鈴木（1992）は、有限要素法を利用して荷重の増加につれた張力場の形成過程を求めた。

さらに木村（2001b, 2012）は、拡張した有効幅理論と降伏応力を考慮して、圧縮、曲げ、せん断の荷重に対する平板の座屈後耐力を求めた。

複数の薄板で構成された閉断面の梁に関して、倉内（1935a, 1935b, 1935c, 1935d）が軸方向圧縮における座屈解析を実施した。Budiansky（1948）は、無限長の正方形断面の梁に関して、無限級数で表した座屈面外変形とエネルギー法を利用して圧縮とねじりが複合する場合の座屈応力関係を求めた。そしてその関係は、慣用的に用いられている平板の圧縮とせん断の関係式とは異なることを述べている。Peters（1948）は正方形断面梁の座屈実験を実施し、Budianskyによって得られた結果と比較した。さらに、塑性を考慮した実験（Peters, 1954）も実施して、圧縮とねじりが複合した場合の関係式を検証した。Wittrickは、すべての薄板の板厚が等しい無限長の正三角形断面および正方形断面の梁に関して、圧縮とせん断が同時に作用する平板の座屈を解析し（Wittrick, 1968a）、その知見を基にして圧縮とねじりが同時に作用する場合の座屈応力関係式を求

めた (Wittrick , 1968b).

1.3 本研究の目的

本研究では自動車車体の骨格を対象としており，その基本的な形状は長方形形状の断面の梁（以下，箱形断面梁）と見なせる．また，骨格に作用する基本的な荷重として，軸圧縮力，ねじりトルク，曲げモーメント，およびそれらが複合した場合が考えられる．前節で記したように過去の研究においては，梁を構成する薄板単独に関する例が多い．箱形断面梁の座屈のうち，軸方向圧縮の座屈は倉内（1935a, 1935b, 1935c, 1935d）によって求められている．正方形断面に関しては，圧縮とねじりおよび曲げとねじりが複合した場合の関係式が求められている (Wittrick , 1968b) が，長方形断面に関しては，ねじりおよび曲げが単独で作用している場合の結果が見当たらない．

1.1節で述べたように，車体骨格の初期概念設計において，弾性座屈を考慮した耐力の評価尺度およびその物理的背景を明確にすることが重要である．その過程の中で本論文では，箱形断面梁に作用する基本的な荷重に対する弾性座屈を求めることを主目的とする．特に，自動車構造開発にかかわる技術者が，簡便に座屈応力を求められるような式を導出することを重視して検討する．また，自動車構造の剛性や耐力，あるいは衝突安全性の性能確認など様々な局面にお

いてFEMが用いられており，それらとの連携や整合性を考慮して，本論文ではFEMによる計算結果を正解とみなして，導出した式の精度を検証する．

なお，本論文で対象とするのは自動車車体の骨格であるため，検討対象とする箱形断面のアスペクト比（短辺／長辺）を0.4～1.0の範囲とする．また同じ意味で，梁を構成する長方形の薄板のアスペクト比として1/3以下を対象とする．

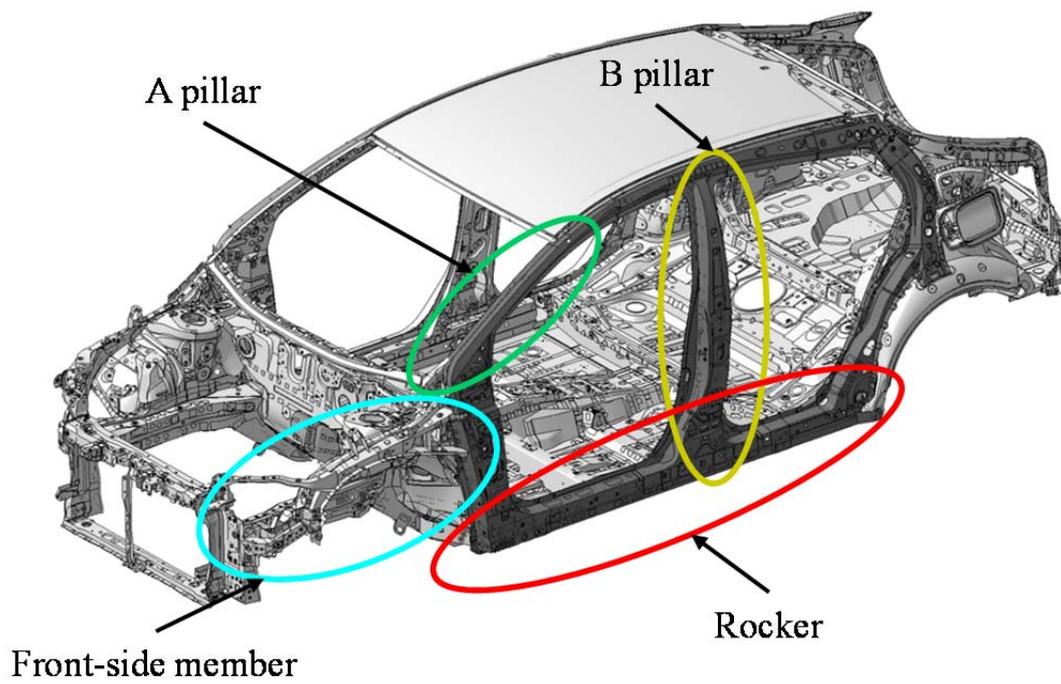


Fig. 1.1 Exmample of automobile main frame structure.
(Refer to <http://newsroom.toyota.co.jp/en/download/10100540>)

第2章 薄板構造の座屈に関する過去の研究概要

2.1 本章の目的

本論文で研究対象としている箱形断面梁は薄板で構成されており，したがって，箱形断面梁の座屈に関して考察するために，これまでの薄板の座屈の研究例を知っておく必要がある．本章では，平板の座屈の微分方程式の導出方法について記したのち，長方形平板に関する圧縮，せん断，曲げおよびこれらが複合した場合の座屈の過去の研究例の概要を記す．また，箱形断面梁の研究例についても言及する．

2.2 長方形平板の座屈

2.2.1 平板の座屈方程式

長方形平板の座屈方程式は，板の曲げの方程式から求めることができる．Fig. 2.1に示すような平板（ヤング率 E ，ポアソン比 μ ，板厚 t ）において，面外（ z 方向）分布荷重を q_z としその撓みを w とする．平面応力状態と微小変位を仮定し，キルヒホッフの仮説から，板厚（ z ）方向の中央面に関する力のつり合いを求めると，平板の曲げの方程式は以下の通りとなる（小林，1987）．

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q_z \quad (2.1)$$

ここで、 D は曲げ剛性であり、以下の通りである。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.2)$$

Fig. 2.2に示すように面内の応力が作用する場合、板の微小領域において z 方向の力のつり合い（平衡方程式）を変形後の状態で求めて、式(2.1)の分布荷重 q_z に面内力の z 方向の成分を代入すると以下の通りとなる（小林，2014）。

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

ただし、

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \sigma_x t \quad (2.4)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = \sigma_y t \quad (2.5)$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = \tau_{xy} t \quad (2.6)$$

である。式(2.3)が平板の座屈の微分方程式である。

以下、本章では、本論文での議論の基礎となる平板および箱形断面梁の座屈に関する既知の式および研究結果を示す。なお、平板単独の座屈応力と箱形断面梁における座屈応力を区別するため、平板の座屈応力は、上に「^」を付加して表すこととする。

2.2.2 圧縮座屈

長手 (x) 方向の圧縮応力 σ (以下, x 方向の圧縮応力を σ として標記する. x と y の区別が必要な場合には, 添え字 x または y を付加する) が作用する場合 (Fig. 2.3), 式(2.3)において $N_y = N_{xy} = 0$, $N_x = -\sigma t$ (σ は圧縮正) として, 以下の座屈の微分方程式が得られる (小林, 2014).

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\sigma t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

境界条件を4辺単純支持とすると, 以下の座屈変形 (面外変形) が境界条件および微分方程式を満たす.

$$w(x, y) = C \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.8)$$

これを式(2.7)に代入すると, 以下の固有値が得られる.

$$\sigma = \left(m\beta + \frac{n}{m\beta} \right)^2 \sigma_e \quad (2.9)$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad \beta = \frac{b}{l} \quad (2.10)$$

n に関しては $n=1$ で最小であり, さらに m に関する σ の最小値を求めることにより,

平板の圧縮座屈応力 $\hat{\sigma}_{cr}$ が求められる. それを

$$\hat{\sigma}_{cr} = k_C \sigma_e \quad (2.11)$$

と表すとき, Fig. 2.4に示すように, 座屈応力係数は以下の通りとなる.

$$k_C = 4.00 \quad (2.12)$$

2.2.3 せん断座屈

前節と同様に，せん断応力 τ （以下簡単のため， xy 面内のせん断応力の添え字 xy を省略する）が作用する場合（Fig. 2.5），式(2.3)において， $N_x = N_y = 0$ ，

$N_y = \tau t$ として，以下の座屈の微分方程式が得られる（小林，2014）.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 2 \tau t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13)$$

境界条件を4辺単純支持とすると，境界条件を満たす変形は一般に以下の通りとなる.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.14)$$

上式は式(2.13)を満たさないため，エネルギー法を用いてせん断座屈応力を求める. すなわち，板の歪みエネルギー

$$U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.15)$$

およびせん断力による仕事

$$W_s = -t \int_0^b \int_0^l \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.16)$$

から，エネルギー停留条件

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}} (U - W_s) = 0 \quad (2.17)$$

により，以下の C_{mn} に関する無限連立方程式が得られる.

$$\frac{Dbl}{8} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 C_{mn} - 4\tau t m n \sum_i \sum_j \frac{ij C_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} = 0 \quad (2.18)$$

ただし、 i および j に関しては、 $m+i$ 、 $n+j$ が奇数のときのみを総和し、その意味で通常の総和と表記方法を異なる形としている。上式を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta} & -\frac{4}{9} \frac{32\tau}{\pi^2 \sigma_e} & 0 & \dots \\ -\frac{4}{9} \frac{32\tau}{\pi^2 \sigma_e} & \frac{16(1+\beta^2)^2}{\beta} & \frac{4}{5} \frac{32\tau}{\pi^2 \sigma_e} & \dots \\ 0 & \frac{4}{5} \frac{32\tau}{\pi^2 \sigma_e} & \frac{(9+\beta^2)^2}{\beta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{13} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.19)$$

となり、この係数行列式=0の条件と式(2.10)より、以下のせん断座屈応力 $\hat{\tau}_{cr}$ が得られる。

$$\hat{\tau}_{cr} = k_s \sigma_e \quad (2.20)$$

ただし、解析的に求められるせん断の座屈応力係数 k_s は無次数の方程式の解となるため、実用的には、厳密解の回帰式として求められた以下の式が用いられている (Fig. 2.6) (Timoshenko, 1961, 1974).

$$k_s = 5.34 + 4.00\beta^2 \quad (2.21)$$

2.2.4 純曲げ座屈

y軸に沿って直線的に変化する圧縮荷重

$$N_x = -\sigma_B t \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) \quad (2.22)$$

が作用する場合 (Fig. 2.7), 式(2.3)において $N_y = N_{xy} = 0$ として、以下の座屈の

微分方程式が得られる.

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -\sigma_B t \left(1 - 2\frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

4辺単純支持の場合, 境界条件を満たす解は一般に以下のように書き表せる.

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.24)$$

前節と同様に, エネルギー法を用いて曲げ座屈応力を求める. 板の歪みエネルギー

ギーは式(2.15)から求められ, 曲げによる仕事は以下の通りとなる.

$$W_B = \int_0^b \left[\sigma_B t \left(1 - 2\frac{y}{b}\right) \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \right] dy \quad (2.25)$$

エネルギー停留条件

$$\frac{\partial}{\partial C_n} (U - W_B) = 0 \quad (2.26)$$

により, 以下の C_n に関する無限連立方程式が得られる.

$$\beta^2 \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2 C_n - \frac{\sigma_B}{\sigma_e} \frac{16}{\pi^2} m^2 \sum_j C_j \frac{nj}{(n^2 - j^2)^2} = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \beta^2 \left[m^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \right]^2 & -\frac{32}{9\pi^2} m^2 \frac{\sigma_B}{\sigma_e} & 0 & \dots \\ -\frac{32}{9\pi^2} m^2 \frac{\sigma_B}{\sigma_e} & \beta^2 \left[m^2 + \left(\frac{2}{\beta}\right)^2 \right]^2 & -\frac{96}{25\pi^2} m^2 \frac{\sigma_B}{\sigma_e} & \dots \\ 0 & -\frac{96}{25\pi^2} m^2 \frac{\sigma_B}{\sigma_e} & \beta^2 \left[m^2 + \left(\frac{3}{\beta}\right)^2 \right]^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.28)$$

式(2.28)の係数行列式=0より, 以下の通りに曲げ座屈応力 $\hat{\sigma}_{Bcr}$ が求められる.

$$\hat{\sigma}_{Bcr} = k_B \sigma_e \quad (2.29)$$

曲げの座屈応力係数 k_B は前節と同様に、無限次数の方程式を解くことになる。

そこで例えば、最初の三項 (C_1, C_2, C_3) から求めると、以下の通りとなる。

$$k_B = \frac{\hat{\sigma}_{Bcr}}{\sigma_e} = \frac{\pi^2 \beta^2}{32} \frac{\left[m^2 + \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right] \left[m^2 + \left(\frac{2}{\beta} \right)^2 \right] \left[m^2 + \left(\frac{3}{\beta} \right)^2 \right]}{m^2 \sqrt{\frac{9}{625} \left[m^2 + \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{81} \left[m^2 + \left(\frac{3}{\beta} \right)^2 \right]^2}} \quad (2.30)$$

この最小値は以下の通りである (Fig. 2.8)。

$$k_B = 23.9 \quad @ \quad m\beta = \frac{3}{2} \quad (2.31)$$

なお、せん断の場合と異なり、これ以上項数を増やしても有効数字3桁までは同じ値となる。

2.3 平板の座屈応力関係式

荷重が複合して作用する場合の座屈に関しては、作用する応力に応じて座屈応力関係式が示されている。圧縮、せん断、曲げの座屈時の各応力成分を $\hat{\sigma}'_{cr}$,

$\hat{\tau}'_{cr}$, $\hat{\sigma}'_{Bcr}$ とするとき、圧縮とせん断の場合は以下の通りとなる。

$$\frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (2.32)$$

せん断と曲げの場合は以下の通りである。

$$\left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (2.33)$$

3つの応力が作用する場合は以下の通りである.

$$\frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} + \left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (2.34)$$

式(2.32)は, Iguchi (1938) が求めた座屈応力の関係を回帰式として表したものである. 式(2.33)は, Chwalla (1936) が提示したものであり, 理論解析結果と良く一致する回帰式として提案されたものである. 式(2.34)は, Johnson (1951) が求めた結果をZiemian (2010) らが示したものである.

2.4 箱形断面梁の座屈

倉内 (1935a, 1935b, 1935c, 1935d) が任意の断面および箱形断面梁の軸方向圧縮座屈を求めている. 平板と平板を連結する稜線に撓みはなく(直線保持), 平板に対して稜線は単純な回転支持ではなくある剛性を有し, そして, 稜線で隣り合う平板の撓み角, モーメントを連成させて座屈応力を求めた. ここで示されている手順では, 長方形断面のみならず, 薄い平板の組合せによる任意の断面形状にも適用可能である. 得られた結果は座屈応力係数として陽な形の式とはならないが, 断面のアスペクト比の関数として座屈応力係数が図示されている (Fig. 2.11).

Wittrick (1968a, 1968b) は、正三角形および正方形断面の梁に関して、圧縮とねじりが作用する場合の座屈及び座屈応力関係式を求めている。荷重比によって大きく座屈変形モードが変わることを示し、座屈応力関係を図示している (Fig. 2.12)。

2.5 まとめ

本章では、本論文の基礎となる長方形平板の座屈に関する研究例および箱形断面梁の研究例について述べた。多くの座屈解析の研究において座屈の微分方程式の解を簡単な形で求めることが難しいため、エネルギー法が利用されている。すなわち、曲げひずみエネルギーと外力による仕事を求め、エネルギー停留条件より座屈応力を求める方法である。しかし、エネルギー法によっても簡単な形の解を得ることは難しいことが示されている。次章以降では、主としてエネルギー法を利用し、座屈変形を無限級数で与えた場合には結果を有限項で表して、実用的な式を導出することを目指す。

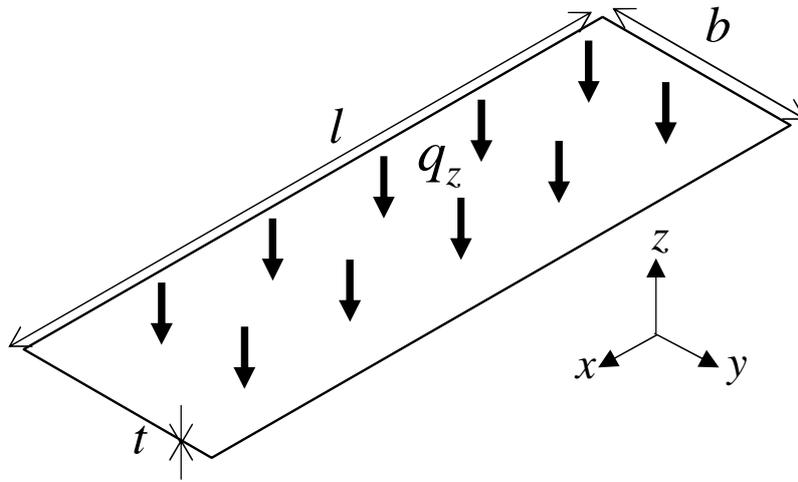


Fig. 2.1 Schematic diagram of rectangular plate for out-of-plane load.

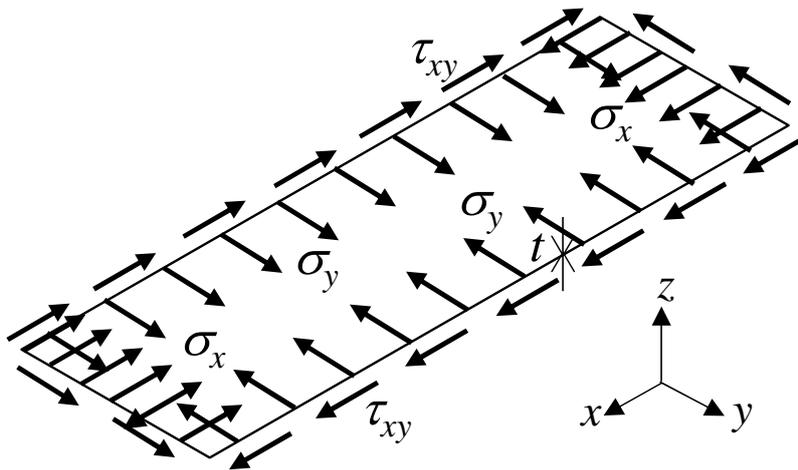


Fig. 2.2 Schematic diagram of rectangular plate at buckling for in-plane load.

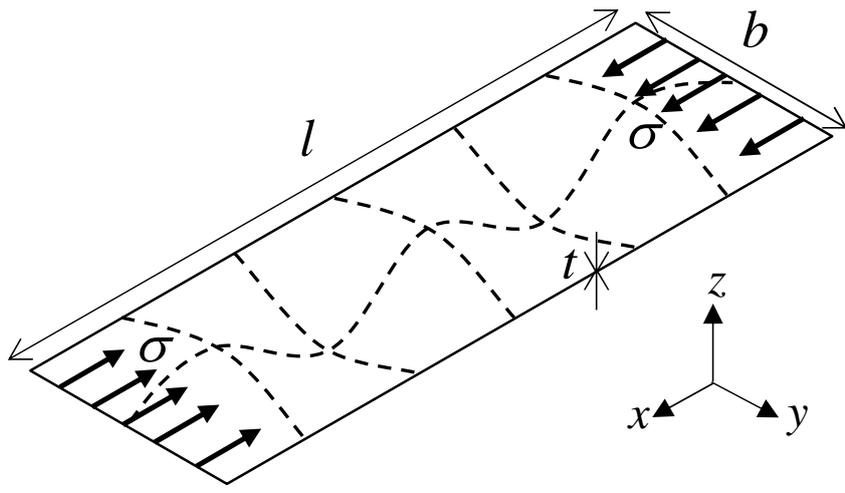


Fig. 2.3 Schematic diagram of rectangular plate for compression.

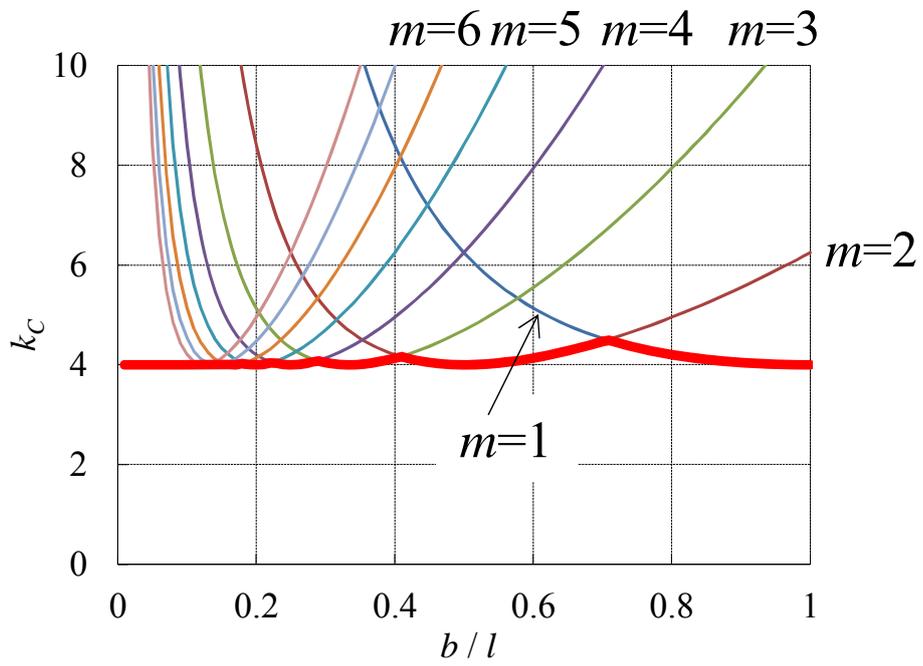


Fig. 2.4 Compression buckling stress coefficient of rectangular plate.

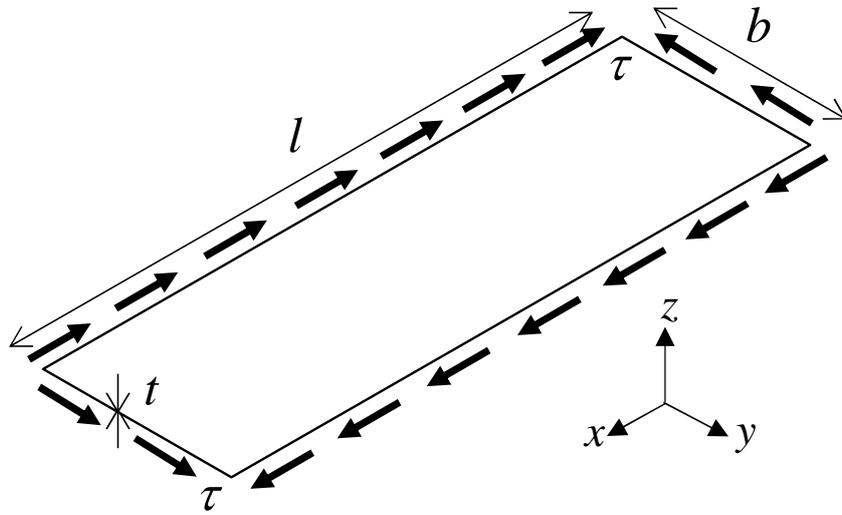


Fig. 2.5 Schematic diagram of rectangular plate for shear.

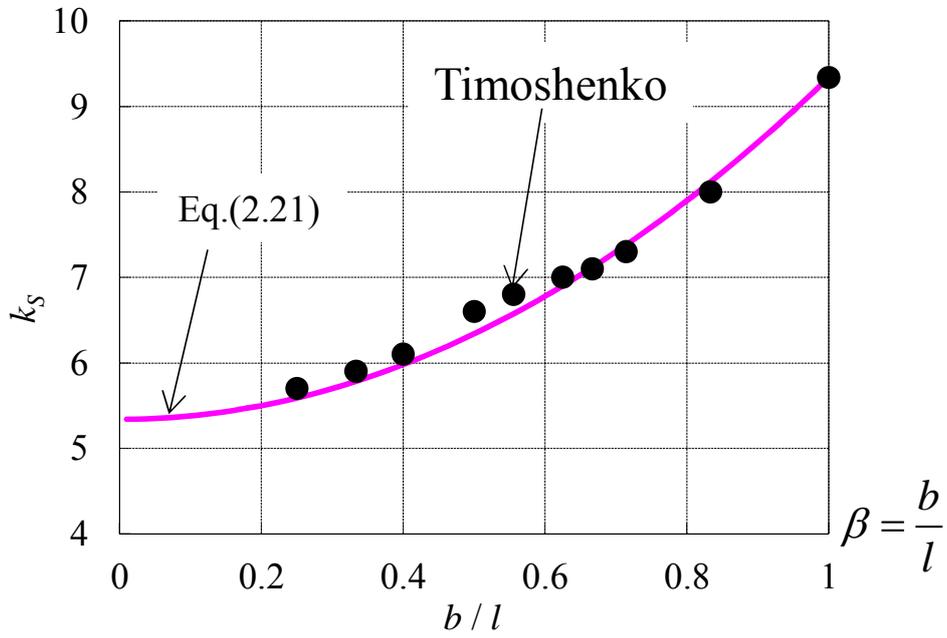


Fig. 2.6 Shear buckling stress coefficient of rectangular plate.

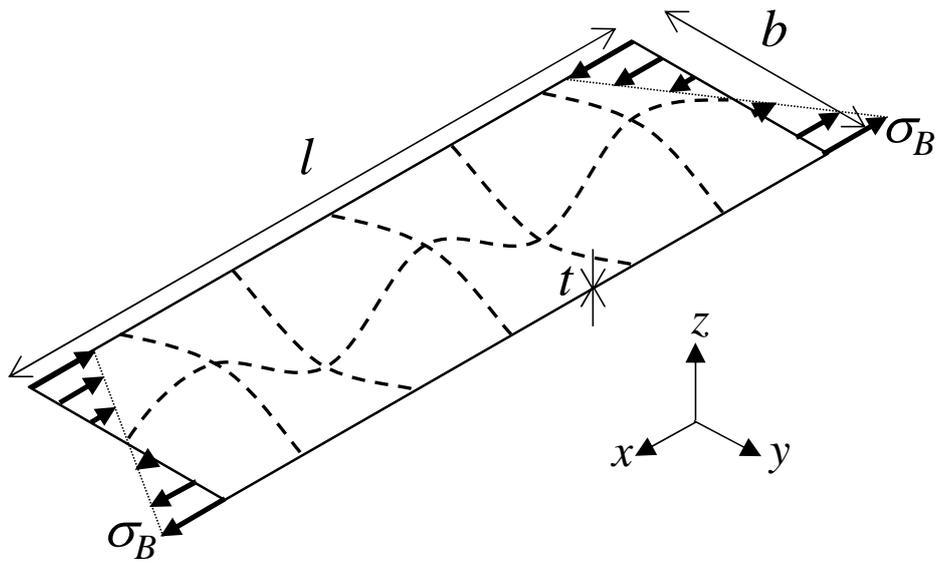


Fig. 2.7 Schematic diagram of rectangular plate for bending.

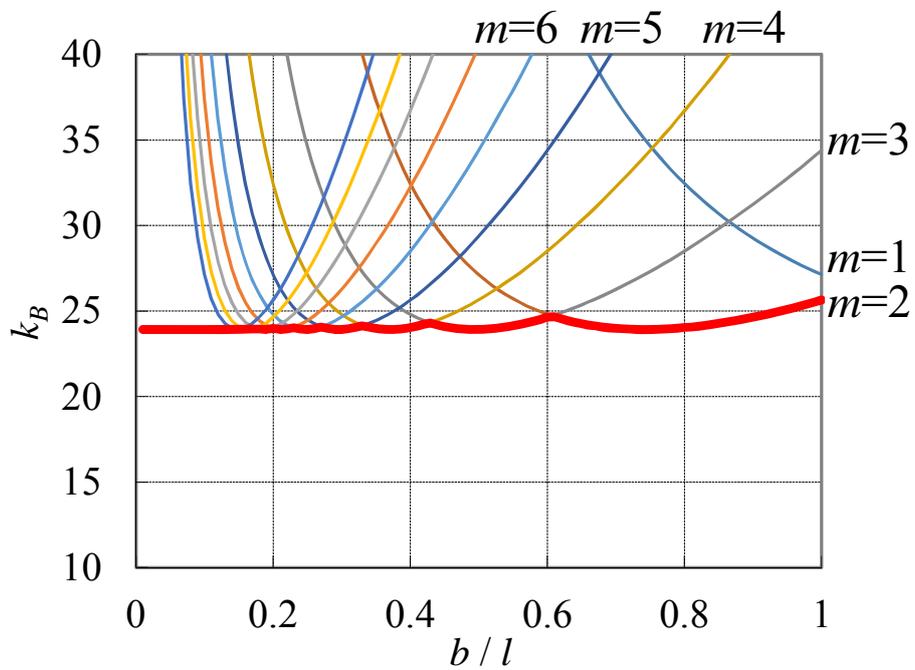


Fig. 2.8 Bending buckling stress coefficient of rectangular plate.

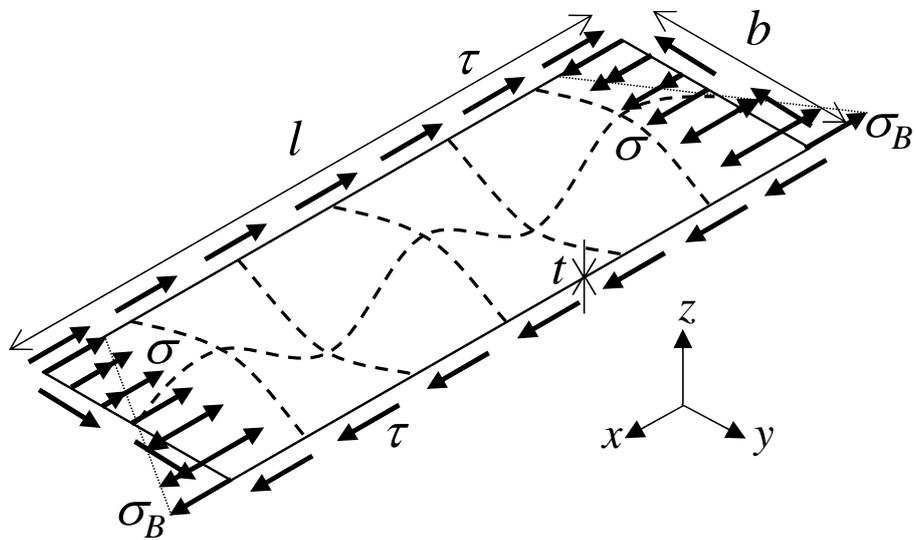


Fig. 2.9 Schematic diagram of rectangular plate for combined stress.

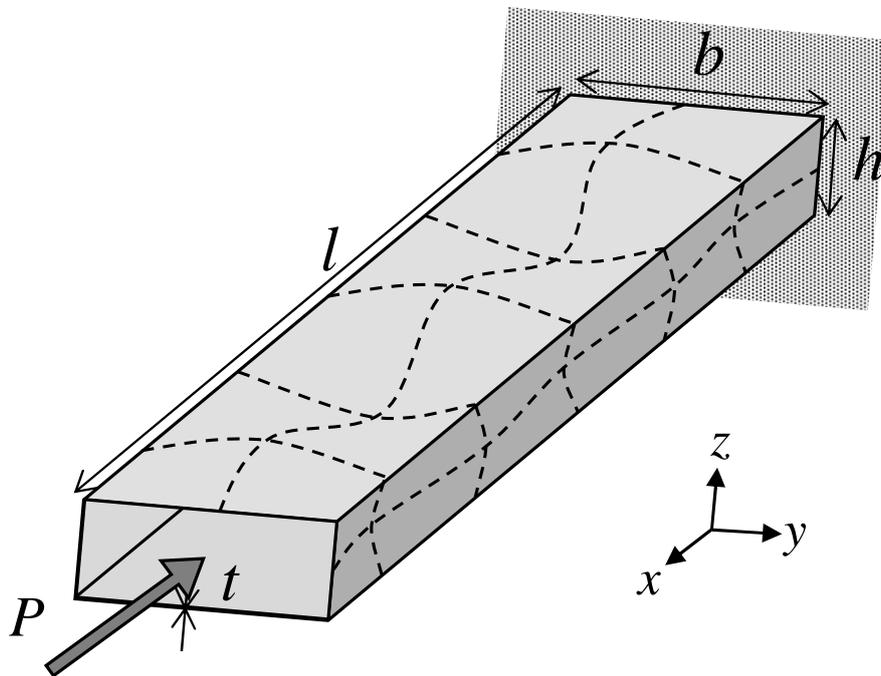


Fig. 2.10 Schematic diagram of box beam for compression.

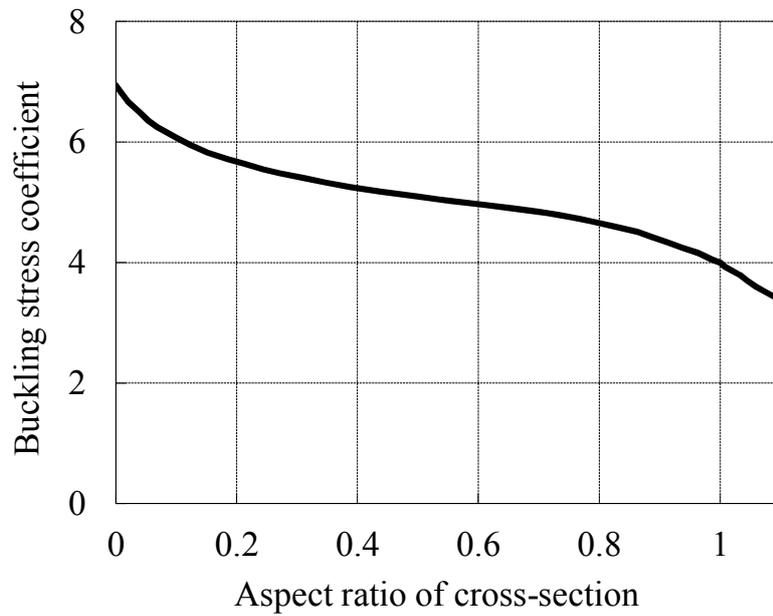


Fig. 2.11 Buckling stress coefficient vs. aspect ratio of cross-section of box beam for compression (Kurauchi, 1935b).

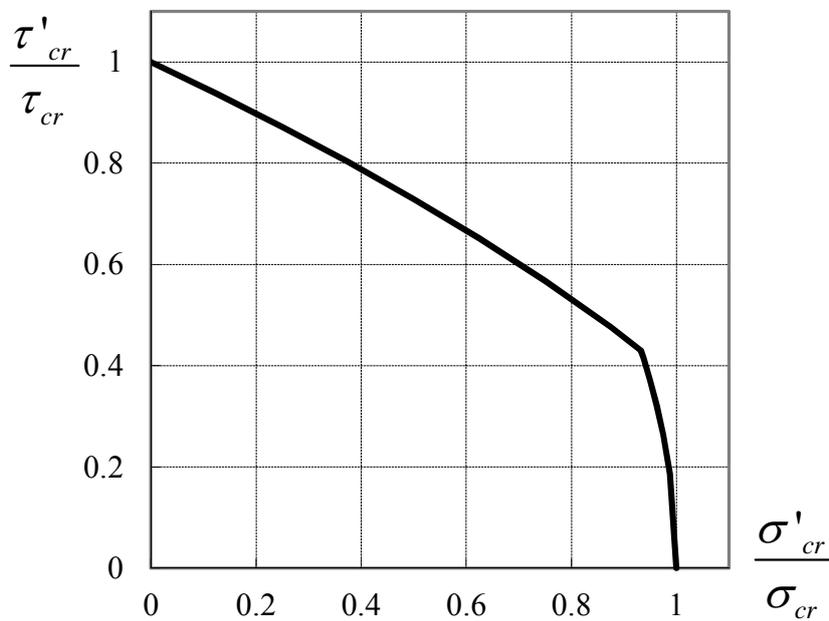


Fig. 2.12 Buckling stress relationship curve of square box beam for compression and torsion (Wittrick, 1968b).

第3章 ねじりトルクによる座屈

3.1 過去の研究と本章の目的

自動車車体が衝突を受けた際、車体を形作る骨格には大きな複合荷重が作用する。例えば、側面から衝突を受けた場合には、Fig. 1.1に示すBピラーには、曲げモーメントが作用し、ロッカーには曲げモーメントとねじりトルクが作用することになる。

車体の骨格にねじりトルクが作用する場合、その断面を構成する各平板にはせん断応力が作用すると考えることができる。単一平板に対するせん断座屈応力は簡便な形で求められているが、本論文で対象とする薄板で構成された箱形断面梁に関して、第1章で述べたようにその座屈に関する検討例は少なく、ねじり時のせん断座屈応力を簡便に求める式は存在しない。Wittrick (1968a, 1968b) が無限長の正方形断面に関して、ねじりトルクと軸方向圧縮荷重が作用する場合の座屈応力関係式を示しており、その中でねじりトルクが単独に作用する場合の結果も示している。しかし、有限長でかつ任意のアスペクト比を持つ長方形断面に対して、Wittrickが求めた結果をそのまま適用することはできない。

そこで本章では、箱形断面梁のねじり時のせん断座屈応力および座屈トルク

を近似的に求める式を導出することを目的とする。そして、導出した式から得られるせん断座屈応力を、有限要素法 (FEM) により求めた座屈応力と比較することによって、その精度を検証する。

3.2 梁のねじりにおける基礎関係式

Fig. 3.1に示すような幅 b (横板), 高さ h (縦板) (ただし, $b \geq h$ の場合のみを考慮), 長さ l , 板厚 t の薄板で構成された箱形断面の梁を考える。この梁の一端にねじりトルク T が作用するとき, 材料のヤング率を E , せん断弾性係数を G , ポアソン比を μ とすると, T と作用点のねじり角 θ , せん断応力 τ との関係は以下の通りとなる。

$$T = \frac{GJ}{l} \theta = 2bht\tau \quad (3.1)$$

ただし, J はねじり定数で, Fig. 3.1のような箱形断面では以下の通りである。

$$J = \frac{2(bh)^2 t}{b+h} \quad (3.2)$$

ねじりトルクにより梁を構成する平板にはせん断応力が作用し, このせん断応力によって座屈が発生する。4枚の薄板を単独の長方形平板と考えた場合, 幅の大きい横板で座屈が発生し, 例えば $b > h$ とするとせん断座屈応力 τ_{bcr} は,

$$\tau_{bcr} = k_s \sigma_e = k_s \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.3)$$

$$k_s = 5.34 + 4.00 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \quad (3.4)$$

と求められる。しかし、横板にせん断座屈が発生し面外変形を生じた場合、それに起因して、縦板にも面外変形を生じる。式(3.3)はFig. 3.1に示す横板のみの座屈を表すに過ぎず、縦板の影響が全く考慮されていない。実際にFEMによりこのような梁のせん断座屈応力を求めてみると、後で示すように縦板の幅によりその値が変化することが確認できる。したがって、ねじり座屈時のせん断応力として直接式(3.3)を用いることは不適當である。

3.3 ねじり座屈時のせん断応力のエネルギー法による導出

Fig. 3.1に示す箱形断面梁のねじり時のせん断座屈応力を求めるために、縦板と横板の両方の面外変形を考慮する必要がある。そこで本節では、横板の面外（z軸方向）変位を w 、縦板の面外（y軸方向）変位を v として、エネルギー法によってせん断座屈応力を求める。

縦板、横板とも四辺単純支持平板とすると、座屈時の面外変位を以下の通りに書き表すことができる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.5)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (3.6)$$

縦板と横板とが共有する端辺における板の傾きは

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{h} H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.8)$$

となる．縦板と横板の面外変位は連成し，その端辺における互いのなす角度が変形後も変化しないと仮定すると，それぞれの係数 B_{mn} ， H_{mn} は，式(3.7)，(3.8)

より共用の係数 Φ_{mn} を利用して以下の通りにおくことができる．

$$\frac{B_{mn}}{b} = \frac{H_{mn}}{h} = \frac{\Phi_{mn}}{\sqrt{bh}} \quad (3.9)$$

この関係式より， w ， v は以下の通りに置き直すことができる．

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b}{h}} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.10)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{h}{b}} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (3.11)$$

これより，箱形断面梁の4枚の板の曲げ歪みエネルギー U とねじりトルクによる

仕事 W_s は， w と v を用いて以下の式から求められる．

$$U = 2 \times \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

$$+ 2 \times \frac{D}{2} \int_0^h \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \right\} dx dz \quad (3.12)$$

$$W_s = -2 \times t \int_0^b \int_0^l \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy - 2 \times t \int_0^h \int_0^l \tau \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dz \quad (3.13)$$

ただし、 D は板の曲げ剛性で以下の通りである。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.14)$$

上式(3.12), (3.13)の定積分を計算し, 4枚の板の U および W_s を求めると, 以下の通りとなる。

$$U = \frac{\pi^4 D l b^2}{4h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{\pi^4 D l h^2}{4b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{h} \right)^2 \right\}^2 \quad (3.15)$$

$$W_s = 8\tau t \frac{b}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m n i j \Phi_{mn} \Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} + 8\tau t \frac{h}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m n i j \Phi_{mn} \Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} \quad (3.16)$$

ただし、 τ は式(3.1)から求められるせん断応力であり, 式(3.16)の i と j に関する総和記号は, $m+i$ および $n+j$ が奇数の場合についてのみ総和することを意味する。

これらの式より, エネルギー停留の条件

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{mn}} (U - W_s) = 0 \quad (3.17)$$

を計算すると以下の通りとなる。

$$\frac{\pi^2 \sigma_g l l}{32 \tau b h} \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^3 \left[m^2 + \left(\frac{l}{b} \right)^2 n^2 \right]^2 + \left(\frac{h}{l} \right)^3 \left[m^2 + \left(\frac{l}{h} \right)^2 n^2 \right]^2 \right\} \Phi_{mn} - m n \frac{b h}{l l} \left[\left(\frac{l}{b} \right)^2 + \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i j \Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} = 0 \quad (3.18)$$

$$\sigma_g = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (3.19)$$

これを行列表記すると以下の通りとなる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_g}{\tau} \beta_0 \beta_2 & -\frac{4}{9} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{4}{9} \beta_1 & 16 \frac{\sigma_g}{\tau} \beta_0 \beta_2 & \frac{4}{5} \beta_1 & \frac{4}{5} \beta_1 & -\frac{36}{25} \beta_1 & \dots \\ 0 & \frac{4}{5} \beta_1 & \frac{\sigma_g}{\tau} \beta_0 \beta_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{4}{5} \beta_1 & 0 & \frac{\sigma_g}{\tau} \beta_0 \beta_4 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{36}{25} \beta_1 & 0 & 0 & 81 \frac{\sigma_g}{\tau} \beta_0 \beta_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{13} \\ \Phi_{31} \\ \Phi_{33} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.20)$$

ただし, 各定数は以下の通りである.

$$\beta_0 = \frac{\pi^2 l l}{32 b h} \quad (3.21)$$

$$\beta_1 = \frac{b h}{l l} \left\{ \left(\frac{l}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right\} \quad (3.22)$$

$$\beta_2 = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left\{ 1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left\{ 1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right\}^2 \quad (3.23)$$

$$\beta_3 = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left\{ 1 + 9 \left(\frac{l}{b}\right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left\{ 1 + 9 \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right\}^2 \quad (3.24)$$

$$\beta_4 = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left\{ 9 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left\{ 9 + \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right\}^2 \quad (3.25)$$

式(3.20)が $\Phi_{mn} = 0$ 以外の解を持つためには, Φ_{mn} の係数行列式=0であることが

必要で、これよりねじり座屈時のせん断応力 τ_{cr} が求められ、十分な数の項を考慮すれば厳密な解が得られる。例えば $\Phi_{11} \sim \Phi_{33}$ の5項まで用いると、 τ_{cr} は

$$\tau_{cr} = \frac{9\beta_0\beta_2}{\beta_1 \sqrt{\frac{706}{625} + \frac{81}{25} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_3} + \frac{81}{25} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_4}}} \sigma_s \quad (3.26)$$

と求められる。Timoshenko (1961) は、平板のせん断座屈応力に関して上式と同様な式を示しているが、上式はTimoshenkoの示した式に幅 h の縦板に関する項を追加した形となっており、 b と h を対称的に含んだ形 (b と h を入れ替えても同じ式) となっている。式(3.26)において、 $h=b$ とおけば、

$$\tau_{cr} = \frac{9\pi^2}{32} \frac{\left\{1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2\right\}^2}{\left(\frac{l}{b}\right) \sqrt{\frac{706}{625} + \frac{81}{25} \left\{\frac{1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}{1 + 9\left(\frac{l}{b}\right)^2}\right\}^2 + \frac{81}{25} \left\{\frac{1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}{9 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}\right\}^2}} \sigma_s \quad (3.27)$$

となり、Timoshenkoの示した式と一致する。

またTimoshenkoは、 l/b (および l/h) が1.5以下であれば十分な精度を有するとしている。しかし、本論文では梁を構成する平板を対象とし l/b は3以上を想定しているので、式(3.26)から得られるねじり座屈時のせん断応力は誤差が大きい。多くの項数を考慮すれば、 l/b は3以上でも高精度な座屈応力が求められるが、簡単な形の式とはならないため実用的とは言えない。

3.4 対称性を考慮したせん断座屈応力係数の近似解

前節での議論を考慮に入れて、ねじり座屈時のせん断応力を求める近似式を提案する。幅 b の平板のせん断座屈応力 $\hat{\tau}_{bcr}$ は式(2.20)で求められるが、オイラーの座屈応力度 σ_e 、座屈応力係数 k_s ともに b を含んでいる。そこで、 b と h を同時に考慮できるようにするために以下の通りの変数を定義する。

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{bcr} &= \left[5.34 + 4.00 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right] \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \\ &= \left[5.34 \left(\frac{l}{b} \right)^2 + 4.00 \right] \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l} \right)^2 = \tilde{g}_s \sigma_g\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\tilde{g}_s = 4.00 + 5.34 \left(\frac{l}{b} \right)^2 \quad (3.29)$$

$$\sigma_g = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l} \right)^2 \quad (3.30)$$

このとき σ_g は b に影響されない変数であり、 \tilde{g}_s のみが b に影響される変数となる。前節で述べたように、ねじり座屈のせん断応力を求める式は b と h を対称的に含んでいることから、式(3.29)中の $(l/b)^2$ の代わりに l/b と l/h に関して対称となるような修正座屈応力係数 g_s を定義し、

$$\tau_{cr} = g_s \sigma_g \quad (3.31)$$

とにおいて、この g_s を求めればよいことになる。

エネルギー法から得られる上式の g_s の解析解は、前節の結果からわかるように無限級数で表されるため、解析解から直接 g_s の値を求めることは簡単ではな

い. そこで, g_s に関して簡便な形の近似式を案出する. g_s の近似式の条件としては, 縦板と横板の影響を対称的に含んでおり, かつ $h=b$ のときに式(2.20)と式(3.31)が一致することである. この特徴を満たす簡単な形の g_s の近似式の候補として, i, j を整数として以下の二つの形の式を考えることができる.

$$g_{su} = 4.00 + 5.34 \frac{\left(\frac{l}{b}\right)^{i+2} + \left(\frac{l}{h}\right)^{i+2}}{\left(\frac{l}{b}\right)^i + \left(\frac{l}{h}\right)^i} \quad (3.32)$$

$$g_{sl} = 4.00 + 5.34 \frac{\left(\frac{b}{l}\right)^j + \left(\frac{h}{l}\right)^j}{\left(\frac{b}{l}\right)^{j+2} + \left(\frac{h}{l}\right)^{j+2}} \quad (3.33)$$

本章では, i と j を変化させて近似式の候補とし, その精度をFEMによる計算結果と比較検証する.

3.5 FEMによる検証

前節で示したせん断座屈応力の近似式の精度を, FEMによる計算との比較により検証する. 幅 b , 高さ h , 長さ l , 板厚 t に対して, Table 3.1 に示すような諸元で, 座屈固有値解析を実施する. FEMソルバーとして汎用解析コード ANSYS を使い, Fig. 3.2 に FEM メッシュの概況を示す. 4 節点シェル要素 (SHELL181) を使い, 要素の大きさはすべての諸元で縦横とも 2.5mm とした. ねじりの作用

点を片端部の断面の中心点とし，その中心点と端面上の全節点を剛体バーでつないでいる．対端は端面上の全節点の並進自由度を拘束している．シェル要素数および荷重点を除く節点数は，最も小さい諸元 ($l=300$ mm, $b=80$, $h=20$, $t=0.8$) のモデルでそれぞれ9600および9680であり，最も多い諸元 ($l=500$ mm, $b=120$, $h=80$, $t=1.2$) でそれぞれ32000および32160である．

座屈固有値解析の計算結果（座屈モード）の一例をFig. 3.3に示す．FEMにより計算したすべての諸元のせん断座屈応力を，横軸を断面のアスペクト比 ($\delta = h/b$) としてFig. 3.4に示す．凡例の丸数字は，Table 3.1に示す構造諸元のLabelである．また，FEM計算により得られたねじり時のせん断座屈応力に対する式(3.32)，(3.33)で $i=1$, $j=0, 1, 2$ とした候補の式により求められる応力の誤差をFig. 3.5に示す．ここで，誤差は， τ_{crFEM} をFEMから求めたせん断応力とし， $\tau_{crCurrent}$ を候補の式から求められるせん断応力として，以下の式により求めている．

$$\text{Error}[\%] = \frac{\tau_{crCurrent} - \tau_{crFEM}}{\tau_{crFEM}} \times 100 \quad (3.34)$$

式(3.32)の形の近似式では，指数 i が大きいほど求められる値がFEMの結果より過大となることを確認し，また式(3.33)では， $j=0$ ではFEMより値が大きい， $j \geq 2$ のときは小さくなる傾向があることを確認した．FEM計算結果に対して最も誤差が小さい近似式は，式(3.33)で $j=1$ としたとき，すなわち以下の近似式で

あることがわかる.

$$g_s = 4.00 + 5.34 \frac{\frac{b}{l} + \frac{h}{l}}{\left(\frac{b}{l}\right)^3 + \left(\frac{h}{l}\right)^3} \quad (3.35)$$

Fig. 3.6に上式で計算した場合の誤差を示す. 実用的なアスペクト比の範囲 ($h/b \geq 0.4$) において誤差がおよそ5%以内であった. また上式から求められる Label⑤の座屈応力を, FEM計算結果および平板理論による値と重ねてFig. 3.7に示す.

3.6 まとめ

本章では, 箱形断面梁に対するねじり時のせん断座屈応力を簡便に求める方法を検討した. せん断座屈応力を近似的に求める式を提案し, FEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較して, 提案した近似式の精度を検証した. その結果, 以下の結論を得た.

- (1) エネルギー法に基づいて求められる座屈の固有方程式から得られる知見を基にして, 従来よりあるせん断座屈応力の式および座屈応力係数を, 横板と縦板の幅を同時にかつ対称的に取り扱うことができる形に変更し, 箱形断面梁のねじり座屈時のせん断応力を求める近似式を提案した.
- (2) FEMによる座屈固有値解析の結果と比較して, 断面のアスペクト比が0.4～

1の間において，提案した近似式による誤差はおよそ5%以内であり，充分実用的な精度であることを確認した.

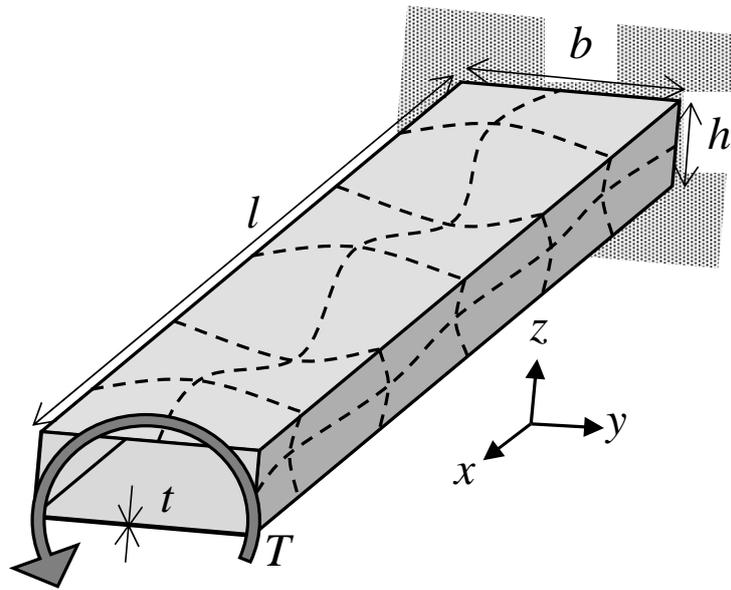


Fig. 3.1 Schematic diagram of box beam for torsion.

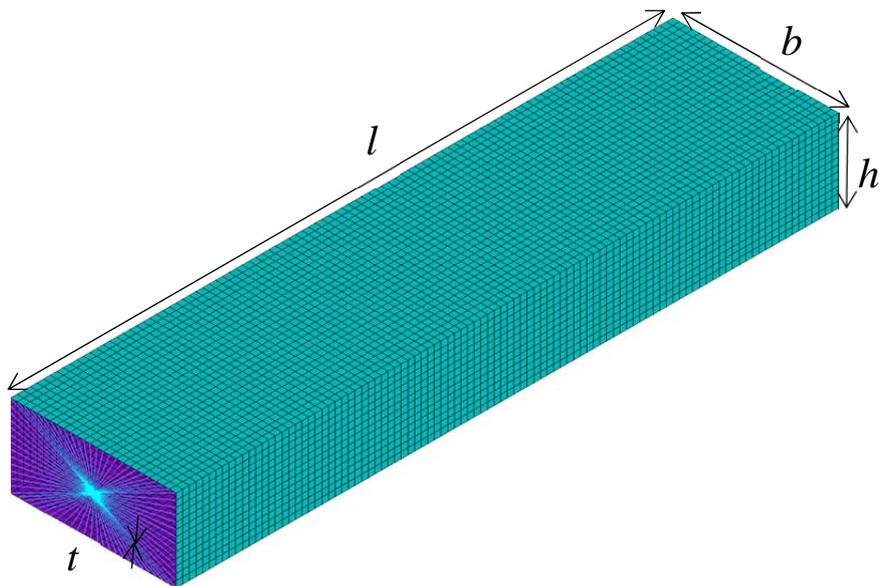


Fig. 3.2 Outline of finite element model of box beam.

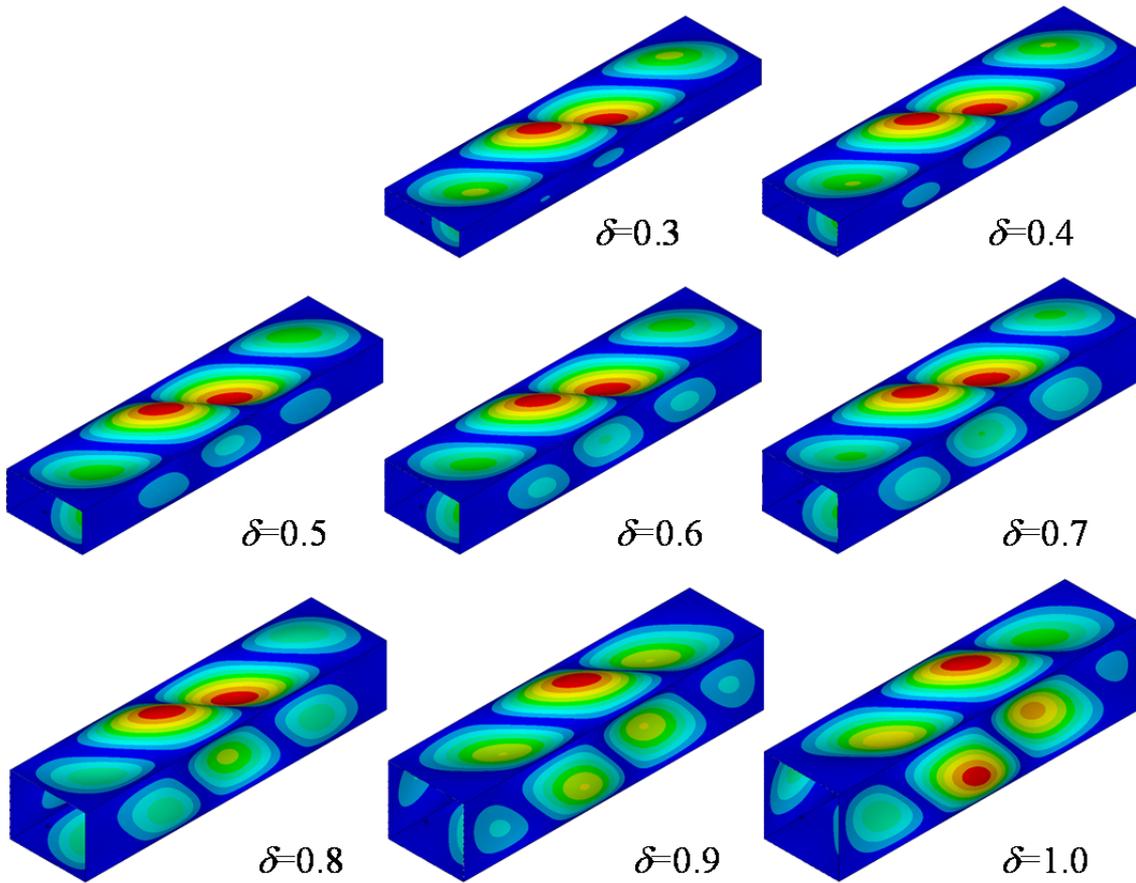


Fig. 3.3 Examples of buckling mode for torsion by FEM.

(⑤ $l=400, b=100, h=30\sim 100, t=1.0$ mm)

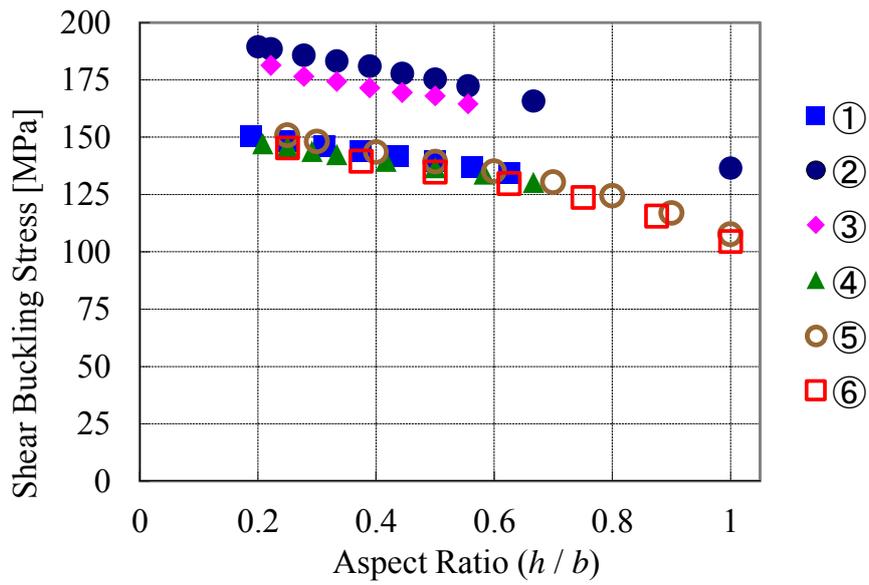


Fig. 3.4 Torsional buckling stress of all dimensions by FEM.

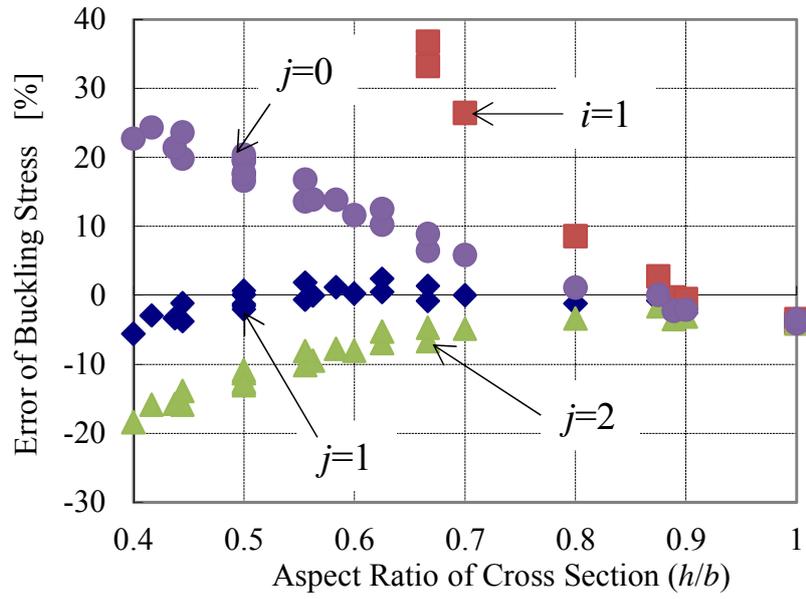


Fig. 3.5 Error distribution of shear buckling stress vs. aspect ratio of cross section.

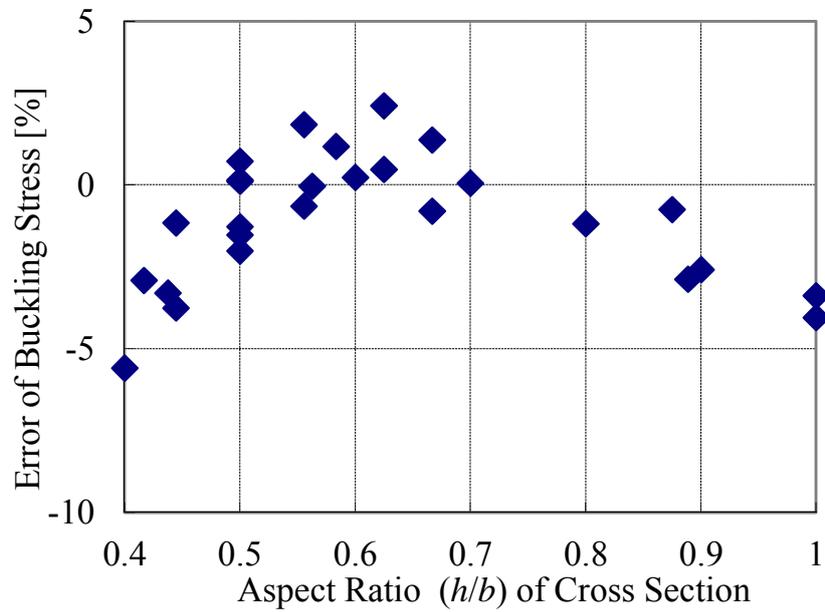


Fig. 3.6 Error distribution of shear buckling stress by Eq. (3.35).

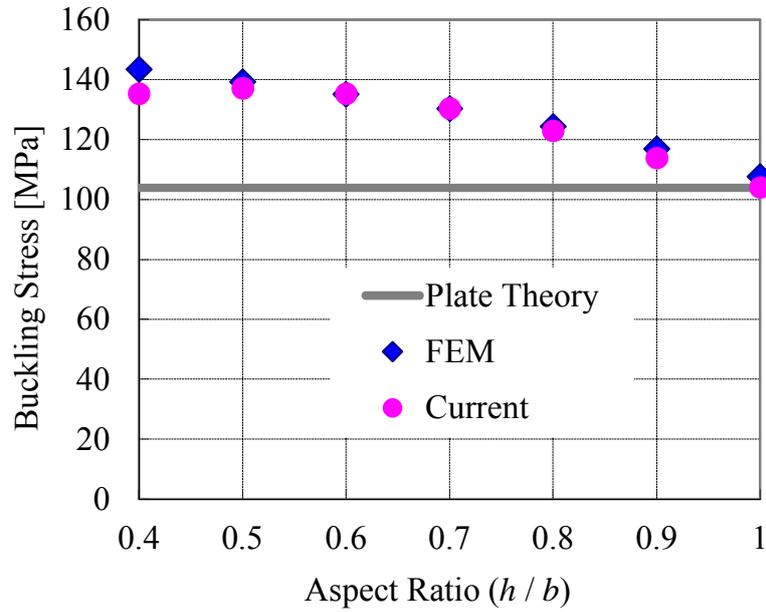


Fig. 3.7 Comparison of buckling stresses by FEM, plate theory, and current method.

(⑤ $l=400, b=100, h=40\sim 100, t=1.0$ mm)

Table. 3.1 Dimensions of finite element model of box beam [mm].

| Label | Length (l) | Width (b) | Thickness (t) | Height (h) |
|-------|----------------|---------------|-------------------|-------------------------------------|
| ① | 300 | 80 | 0.8 | 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 |
| ② | 300 | 90 | 1.0 | 30, 35, 40, 45, 50, 60, 80, 90 |
| ③ | 400 | 80 | 1.0 | 30, 40, 50, 70 |
| ④ | 400 | 90 | 1.0 | 25, 35, 40, 45, 50 |
| ⑤ | 400 | 100 | 1.0 | 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 |
| ⑥ | 500 | 120 | 1.2 | 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80 |

第4章 曲げモーメントによる座屈

4.1 過去の研究と本章の目的

自動車車体が衝突を受けた際、車体を形作る骨格には、前章で検討したねじりトルクのみならず、曲げモーメントも作用する。そこで、本章では箱形断面梁に曲げモーメントによる座屈に関して検討する。

箱形断面梁にねじりや圧縮が作用する場合、梁を構成する薄板の座屈変形を軸対称として考えることができる。すなわち、例えば梁の断面を正方形とした場合、断面を構成する4枚の薄板は同等な変形や特性を有すると考えることができる。しかし梁の曲げに対しては、薄板の変形形状が軸対称とはならないため、ねじりや圧縮とは異なる考え方が必要である。従来、曲げ座屈に関しては、梁を構成する薄板を単独の1枚の板とみなし、その圧縮座屈応力を補正して曲げ座屈応力を求めている例がある (AISI/CARS 2002, 2002)。しかし前章で記したように、複数枚の薄板で構成された梁においては、隣り合う薄板同士の連成を考慮に入れる必要がある。そこで、エネルギー法により箱形断面梁に曲げモーメントが作用する場合の座屈応力を求める。

断面を構成する薄板には、曲げモーメントにより曲げ応力が作用する面と圧縮応力が作用する面、および引張応力が作用する面とが存在する。それぞれの

面で座屈発生時の変形形状を仮定し，かつ隣接する薄板同士の連成を考慮し，ポテンシャルエネルギー停留条件により得られる座屈固有方程式を導出する．そこから，座屈応力の計算式を導出し，有限要素法（FEM）による結果と比較して精度を検証する．

なお，本章で対象とする梁として自動車車体の骨格を想定しているため，アスペクト比（短辺/長辺）が0.4以上（その逆数では2.5以下）となる断面の梁を対象とする．箱形断面梁の曲げ座屈の基礎となる長方形平板の圧縮および曲げ座屈に関する既知の基礎式は第2章に示している．また，以降，圧縮を正，引張を負として表記し，平板理論と箱形断面梁を区別するため，平板理論から求められる座屈応力には，上に「^」を付記する．

4.2 四面を単独の面として考えた場合の曲げ座屈応力

Fig. 4.1に示す長さ l ，横幅 b ，縦幅 h ，板厚 t の薄板で構成された箱形断面梁の片端に z 軸回りの曲げモーメント M_h が作用する（幅 h の右側面が圧縮となる）場合を考える．このとき，幅 b の上下面には曲げ応力が作用し，図中の太い線以上に以下の式で表される圧縮応力 σ_B が生じる．

$$\sigma_B = \frac{M_h}{bt \left(\frac{1}{3}b + h \right)} \quad (4.1)$$

そして，右側面にはこの圧縮応力 σ_B ，左側面には引張応力 $-\sigma_B$ が作用すること

になる。箱形断面梁を構成する4つの面の連成がないと仮定するとき、すなわち平板理論で考えるならば、箱形断面梁には、上下面の面内曲げ座屈応力と右側面の圧縮座屈応力のどちらか小さい方で座屈が生じることになる。上下面に曲げ座屈が生じるとすると、その座屈応力は以下の通りとなる。

$$\hat{\sigma}_{Bbcr} = k_B \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad k_B = 23.9 \quad (4.2)$$

また、同様に右側面に圧縮座屈が生じるとすると、その座屈応力は以下の通りとなる。

$$\hat{\sigma}_{Bhcr} = k_C \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2, \quad k_C = 4.00 \quad (4.3)$$

Fig. 4.1に示すように曲げモーメントを作用させた場合に、上記2つの式で求められる座屈応力の低い方で座屈が生じることになる。式(4.2)と(4.3)との比は、

$$\frac{\hat{\sigma}_{Bbcr}}{\hat{\sigma}_{Bhcr}} = \frac{k_B \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2}{k_C \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2} = \frac{23.9}{4} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (4.4)$$

となり、これより、 $\hat{\sigma}_{Bbcr}/\hat{\sigma}_{Bhcr}$ の値が1より大きいか小さいかによって、どちらの座屈が生じるかが決定されることになる。すなわち

$$\delta = \frac{h}{b} \quad (4.5)$$

とおけば、 $\delta < \sqrt{4/23.9} \approx 0.409$ のときには、上下面で曲げ座屈が生じ、座屈応力 σ_{Bcr} は式(4.2)で求められ、 $\delta > 0.409$ であれば右側面で圧縮座屈が生じ、 σ_{Bcr} は

式(4.3)で求められることになる。

4.3 三面が同時に座屈すると考えた場合の曲げ座屈応力

前節では、箱形断面梁を構成する各面が単独に座屈を生じるとして、その座屈応力を示した。しかし前章でも述べたように、箱形断面梁の座屈を求めるには隣接面同士の連成を考慮しなければならない。そこで本節では、隣接面との連成を考慮し上下面と右側面が同時に座屈するとして、エネルギー法により曲げ座屈を求める。ただし、左側面は引張荷重が作用する面となるため、座屈は生じないと仮定する。

平板理論ではFig. 4.1の長手 (x 軸) 方向の変形は、曲げを受ける面 (上下面)、圧縮を受ける面 (右側面) とも、1項の正弦波形で表すことができるので、本節でも x 軸方向の変形を半波数 m の1項の正弦波形で表すことにする。上下面において曲げ座屈が生じるとき、平板理論と同様な以下の変形 (曲げ座屈モード、下面は正負が逆) を仮定する (林, 1966, 小林, 2014)。

$$w = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.6)$$

単独の平板に圧縮座屈が生じる場合の変位形は通常、 x 方向 y 方向とも、1項の正弦波形で表すことができるが、ここでは上下面との連成を考慮する必要がある。そこで、右側面は圧縮を受ける面ではあるが、幅 (z 軸) 方向の変位形を曲

げ座屈と同様に正弦級数で表すことにして、右側面の変位形を以下の通りとする。

$$v = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (4.7)$$

前章と同様に、隣接面との間の角部の角度が変形後も変化しないとすると、

各面の係数は、共用の係数 Φ_n を用いて以下の通りの関係となる。

$$\frac{B_n}{b} = \frac{H_n}{h} = \frac{\Phi_n}{\sqrt{bh}} \quad (4.8)$$

また、3面の歪みエネルギー、上下面の曲げによる仕事、右側面の圧縮による仕事は以下の通りである。

$$U = 2 \times \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (4.9)$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^h \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} \right] dx dz$$

$$W_B = 2 \times \int_0^b \int_0^l \sigma_B t \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (4.10)$$

$$W_C = \int_0^h \int_0^l \sigma_B t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx dz \quad (4.11)$$

ただし、 D は平板の曲げ剛性で以下の通りである。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4.12)$$

式(4.6)、(4.7)を式(4.9)、(4.10)、(4.11)に代入して積分して、式(4.8)の関係をを用い

ると、以下の結果が得られる。

$$U = 2 \times \frac{\pi^4 D l b^2}{8h} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2 \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{\pi^4 D l h^2}{8b} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2 \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{h} \right)^2 \right]^2 \quad (4.13)$$

$$W_B = 4m^2 \frac{b^2}{hl} \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j^{\infty} \Phi_n \Phi_j \frac{nj}{(n^2 - j^2)^2} \quad (4.14)$$

$$W_C = \frac{\pi^2}{8} \frac{h^2}{bl} m^2 \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2 \quad (4.15)$$

ポテンシャルエネルギーの停留条件から

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_n} (U - W_B - W_C) = 0 \quad (4.16)$$

を計算すると、以下の Φ_n に関する連立方程式が得られる。

$$\frac{1}{m^2} \left\{ 2 \frac{\beta^3}{\eta^3} \left[m^2 + \frac{n^2}{\beta^2} \right]^2 + \left[m^2 + \frac{n^2}{\eta^2} \right]^2 \right\} \Phi_n - \frac{\sigma_B}{\sigma_g} \Phi_n - \frac{\sigma_B}{\sigma_g} \frac{32n}{\pi^2} \frac{\beta^3}{\eta^3} \sum_j^{\infty} \Phi_j \frac{j}{(n^2 - j^2)^2} = 0 \quad (4.17)$$

ただし、式内の各変数の定義は以下の通りである。

$$\beta = \frac{b}{l}, \quad \eta = \frac{h}{l} \quad (4.18)$$

$$\sigma_g = \frac{\pi^2 D}{l^2 t} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{l} \right)^2 \quad (4.19)$$

式(4.17)を行列表記すると、以下の通りとなる。

$$\begin{bmatrix} c_1 - \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & -\frac{64}{9\pi^2} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^3 \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & 0 & \dots \\ -\frac{64}{9\pi^2} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^3 \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & c_2 - \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & -\frac{192}{25\pi^2} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^3 \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & \dots \\ 0 & -\frac{192}{25\pi^2} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^3 \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & c_3 - \frac{\sigma_B}{\sigma_g} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$c_n = \frac{1}{m^2} \left\{ 2 \frac{\beta^3}{\eta^3} \left[m^2 + \frac{n^2}{\beta^2} \right]^2 + \left[m^2 + \frac{n^2}{\eta^2} \right]^2 \right\} \quad (4.21)$$

式(4.20)の Φ_n の係数行列式=0が座屈荷重方程式であり，これを満たすのが座屈応力 σ_{Bcr} である．ただし，式(4.20)は無限次数の方程式となるため，近似的に解くことを考える．

4.3.1 一項近似

$n=1$ の1項のみで考えると，以下の通りに g_B が求められる．

$$\sigma_{Bcr} = g_B \sigma_g \quad (4.22)$$

$$g_B = \frac{1}{m^2} \frac{\beta}{\eta^2} \left[2 \frac{\beta^2}{\eta} \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 + \frac{\eta^2}{\beta} \left(m^2 + \frac{1}{\eta^2} \right)^2 \right] \quad (4.23)$$

半波数 m は g_B が最小となるように決定されるから， m に対する g_B の最小値を求めると，以下の通りとなる．

$$g_B = \frac{1}{\eta^2} \sqrt{\frac{(2\delta + \delta^4)}{2\delta + 1}} \left[\frac{2}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2\delta + 1}{(2\delta + \delta^4)}} + 1 \right)^2 + \delta^2 \left(\sqrt{\frac{2\delta + 1}{(2\delta + \delta^4)}} + \frac{1}{\delta^2} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

ただし， $\eta = \delta\beta$ の関係により， β を用いずに表記した．

上式より、 $g_B \eta^2$ は、 δ のみで決定されることがわかる。ただし、 $n=1$ のみで考えることは、曲げによる仕事 W_B を無視することになるため、曲げ座屈が主体となる領域（すなわち、 $\delta \leq 0.409$ ）において、誤差が大きくなることが予想される。

4.3.2 二項近似

$n=1, 2$ の2項のみで考えると、 $\eta = \delta\beta$ の関係を用いて、式(4.20)から g_B に関する以下の2次方程式が得られる。

$$\left[1 - \left(\frac{64}{9\pi^2} \frac{1}{\delta^3} \right)^2 \right] g_B^2 - (c_1 + c_2) g_B + c_1 c_2 = 0 \quad (4.25)$$

g_B^2 の係数がゼロでないとして、単純に g_B を求めると以下の通りとなる。

$$g_B = \frac{(c_1 + c_2) \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 \left[1 - \left(\frac{64}{9\pi^2} \frac{1}{\delta^3} \right)^2 \right]}}{2 \left[1 - \left(\frac{64}{9\pi^2} \frac{1}{\delta^3} \right)^2 \right]} \quad (4.26)$$

上式で、 g_B を最小とする m を求めるには m^2 の高次方程式を解くことになるため、 g_B を最小とする m を解析的に求めることは簡単ではない。

4.4 圧縮座屈を主として考える場合

本節では、曲げモーメントにより圧縮を受ける右側面が座屈し、上下面はそれに伴って変形する場合を考える (Fig. 4.2)。前節と同様に、上下面と右側面

の間の角部は座屈後も角度を保つとする。前節と異なり，上下面の変形に伴いそれらの右端部のモーメントはゼロとならないため，このモーメントが右側面の変形に伴うモーメントとつり合うことが必要である。ただし，前節と同様に引張となる左側面の面外変形はないとし，したがって上下面の左端部のモーメントのつり合いを考慮しないこととする。また長方形平板の圧縮座屈変形状（圧縮座屈モード）は，通常，

$$v_{rect} = H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (4.27)$$

となり，幅（短辺）方向の半波数 n が1のときにその圧縮座屈応力が最小となるので，本節では以降 $n=1$ とおく。

以上の基本的な考え方から，右側面および上面（下面は正負が逆）の変位形として以下の式が得られる。

$$v = H_m \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\sin \frac{\pi z}{h} - \frac{2\pi}{b+2h} \left(z - \frac{1}{h} z^2 \right) \right] \quad (4.28)$$

$$w = H_m \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\frac{\pi b}{h(b+2h)} \left(-\frac{1}{b} y^2 + \frac{1}{b^2} y^3 \right) \right] \quad (4.29)$$

圧縮座屈を生じる右側面では，座屈変形とそれに伴う強制変形の影響が重畳した変形となっている。

これらの変形状を基にして，エネルギー法により曲げ座屈応力を求める。上の2つの式を式(4.9)，(4.10)，(4.11)に代入して，積分を実行すると以下の通り

となる.

$$U = \frac{\pi^4 D l h}{8} H_m^2 \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \right)^2 \right]^2 + 2 \times \frac{D}{2} H_m^2 \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{210} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 b^3 l + \frac{2}{15} b l \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 2 \frac{l}{b} \right] \quad (4.30)$$

$$W_B = \sigma_B t \pi^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 H_m^2 \frac{b^5 l}{840 h^2 (b+2h)^2} \quad (4.31)$$

$$W_C = \sigma_B t \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 H_m^2 \frac{h l}{4} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{16h}{b+2h} + \pi^2 \frac{2h^2}{15(b+2h)^2} \right] \quad (4.32)$$

H_m に関するポテンシャルエネルギーの停留条件式

$$\frac{\partial}{\partial H_m} (U - W_B - W_C) = 0 \quad (4.33)$$

を求め、 H_m の係数行列式=0より、 σ_{Bcr} に関する以下の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l} \right)^2 \left\{ m^4 \left[\frac{\pi^4}{210} \frac{b^5}{h^2 (b+2h)^2 l} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{l} - 4 \frac{h}{b+2h} \frac{h}{l} + \frac{\pi^4}{30} \frac{h^3}{(b+2h)^2 l} \right] \right. \\ & \quad + m^2 \left[\frac{2\pi^2}{15} \frac{b^3 l}{h^2 (b+2h)^2} + \frac{\pi^2}{4} \frac{l}{h} - 8 \frac{l}{(b+2h)} + \frac{2\pi^2}{3} \frac{h l}{(b+2h)^2} \right] \\ & \quad \left. + \frac{\pi^2}{8} \frac{l^3}{h^3} - 4 \frac{l^3}{h^2 (b+2h)} + 4 \frac{l^3}{h (b+2h)^2} + 2 \frac{b l^3}{h^2 (b+2h)^2} \right\} \\ & - \sigma_{Bcr} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2 b^5 l}{840 h^2 (b+2h)^2} \\ & - \sigma_{Bcr} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{h l}{4} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{16h}{b+2h} + \pi^2 \frac{2h^2}{15(b+2h)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

上式を σ_{Bcr} に関して解き、式(4.18)、(4.19)を用いて置き直すと以下の通りとな

る.

$$g_B = \frac{\sigma_{Ber}}{\sigma_g} = \frac{A_1 m^4 + A_2 m^2 + A_3}{A_0 m^2} \quad (4.35)$$

$$A_0 = \eta \left[\frac{\pi^4 (1 + 28\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta)}{840\delta^3 (1 + 2\delta)^2} \right] \quad (4.36)$$

$$A_1 = \eta \left[\frac{4\pi^4 (1 + 7\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta)}{840\delta^3 (1 + 2\delta)^2} \right] \quad (4.37)$$

$$A_2 = \frac{1}{\eta} \left[\frac{8\pi^2 (1 + 5\delta^3) + 15\pi^2 \delta (1 + 2\delta)^2 - 480\delta^2 (1 + 2\delta)}{60\delta (1 + 2\delta)^2} \right] \quad (4.38)$$

$$A_3 = \frac{1}{\eta^3} \frac{\pi^2 (1 + 2\delta) - 16\delta}{8(1 + 2\delta)} \quad (4.39)$$

前述の通り，半波数 m は g_B が最小となるように決定され，

$$m^2 = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \quad (4.40)$$

のときに g_B は最小となり，その値は以下の通りとなる．

$$g_B = \frac{2\sqrt{A_1 A_3} + A_2}{A_0} \quad (4.41)$$

すなわち，断面のアスペクト比 δ で書き表すと，

$$g_B = \frac{1}{\eta^2} \frac{2\delta}{\pi^4 (1 + 28\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta)} \\ \times \left\{ \sqrt{105\delta (1 + 2\delta) (\pi^2 + 2\pi^2 \delta - 16\delta) [4\pi^4 (1 + 7\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta)]} \right. \\ \left. + 7\delta [8\pi^2 (1 + 5\delta^3) + 15\pi^2 \delta (1 + 2\delta)^2 - 480\delta^2 (1 + 2\delta)] \right\} \quad (4.42)$$

となる．

4.5 曲げ座屈を主として考える場合

Fig. 4.1に示す箱形断面梁において，上下面の曲げ座屈が主となるのは，断面のアスペクト比が $\delta < 0.409$ となる場合である．ただし，4.1節で述べたように，本論文で対象とする構造は自動車車体の骨格であり，多くの部位で $\delta > 0.4$ である．したがってここでは，考え方を示すのみとする．

曲げ座屈に起因して生じる上下面の面外変位形状を式(4.6)とする．右側面は上下面の座屈変形により強制変形を受け，また前節と同様にその間の角部は座屈後も角度を保つと仮定し，角部のモーメントのつり合いを考慮して，右側面の面外変位形および上面の面外変位形（下面は正負が逆）を以下の通りにおくことができる．

$$v = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n n\pi h}{b(b+2h)} B_n \left(z - \frac{1}{h} z^2 \right) \quad (4.43)$$

$$w = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{(-1)^n n\pi}{b+2h} \left(-\frac{1}{b} y^2 + \frac{1}{b^2} y^3 \right) \right\} \quad (4.44)$$

3つの面の歪みエネルギー，上下面の曲げによる仕事，右側面の圧縮による仕事は，式(4.9)，(4.10)，(4.11)より求められるから，これらの式に式(4.43)，(4.44)を代入し積分して，ポテンシャルエネルギーの停留条件

$$\frac{\partial}{\partial B_n} (U - W_B - W_C) = 0 \quad (4.45)$$

から，4.3節と同様の手順により，座屈応力を求めることが可能と考える．

4.6 検証計算と考察

4.6.1 有限要素法（FEM）による計算結果

本節では, 4.3節および4.4節で示した曲げ座屈応力におけるいくつかの座屈係数の算出式の精度をFEMによる計算との比較により検証する. Table 4.1に示す長さ l , 幅 b , 高さ h , 板厚 t を用いて座屈固有値解析を実施した. 既に述べたように本論文の議論の範囲は, 断面のアスペクト比 $\delta > 0.4$ であるが, δ に対する座屈応力の変化を知るために, FEMでは $\delta \leq 0.4$ の構造に関しても計算した. ヤング率 $E=205.8\text{GPa}$, ポアソン比 $\mu=0.3$ とし, FEMソルバーとしてANSYSを用い, そのFEMメッシュの概況をFig. 4.3に示す. 4節点シェル要素 (SHELL181) を用い, 要素の大きさはすべての諸元で縦横とも 2.5mm とした. 曲げモーメントの作用点を片端部の断面の中心点とし, その中心点と端面上の全節点を関係づけた. 対端は端面上の全節点の並進自由度を拘束している.

$l=450$, $b=60$, $h=20\sim 250$, $t=1.0\text{ mm}$ (Label④) のときの, 座屈モードのFEM計算結果の一例をFig. 4.4に示す. FEMにより計算したすべての諸元の圧縮座屈応力を, 横軸を断面のアスペクト比 ($\delta = h/b$) として, Fig. 4.5に示す. 凡例の丸数字は, Table 4.1に示す構造諸元のLabelである. またFig. 4.4と同じ諸元の座屈応力に関して, FEM, および2.2節で示した考え方から平板理論 (Plate

Theory) により得られる結果をFig. 4.6に重ねて示す. ただし, 上記FEM計算結果で得られる座屈固有値は曲げモーメント (M_{hcrFEM}) であるため, 式(4.1)を考慮して以下の式よりFEM計算結果の座屈応力を求めている.

$$\sigma_{BcrFEM} = \frac{M_{hcrFEM}}{bt \left(\frac{1}{3}b + h \right)} \quad (4.46)$$

4.6.2 結果の比較

式(4.24)および(4.42)からわかるように, $g_B \eta^2$ は梁の長さ l , 板の板厚 t にかかわらず, 断面のアスペクト比 δ のみによって決まる値である. また, いくつかの諸元で確認計算を実施し, 式(4.26)から m に対する最小値を求めたところ, その値から求めた $g_B \eta^2$ も δ のみに影響されることがわかった. そこで本節では,

$$k_{Ch} = g_B \eta^2 \quad (4.47)$$

とにおいて, 式(4.24), (4.26), (4.42)を以下の通りに置き直す.

$$k_{Ch1} = \sqrt{\frac{(2\delta + \delta^4)}{2\delta + 1} \left[\frac{2}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2\delta + 1}{(2\delta + \delta^4)}} + 1 \right)^2 + \delta^2 \left(\sqrt{\frac{2\delta + 1}{(2\delta + \delta^4)}} + \frac{1}{\delta^2} \right)^2 \right]} \quad (4.48)$$

$$k_{Ch2} = \eta^2 \frac{(c_1 + c_2) \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2 \left[1 - \left(\frac{64}{9\pi^2} \frac{1}{\delta^3} \right)^2 \right]}}{2 \left[1 - \left(\frac{64}{9\pi^2} \frac{1}{\delta^3} \right)^2 \right]} \quad (4.49)$$

$$k_{Ch0} = \frac{2\delta}{\pi^4 (1 + 28\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta)} \times \left\{ \sqrt{105\delta(1 + 2\delta)(\pi^2 + 2\pi^2\delta - 16\delta) \left[4\pi^4 (1 + 7\delta^5) + 105\pi^2 \delta^3 (1 + 2\delta)^2 - 3360\delta^4 (1 + 2\delta) \right]} + 7\delta \left[8\pi^2 (1 + 5\delta^3) + 15\pi^2 \delta (1 + 2\delta)^2 - 480\delta^2 (1 + 2\delta) \right] \right\}$$

(4.50)

以上の式による座屈応力係数 k_{Ch^*} の値(式(4.26)では, m に対する k_{Ch2} の最小値)をFEM結果と比較する. なお, 座屈応力 σ_{Bcr} はこれらの k_{Ch^*} により以下の通りに求められる.

$$\sigma_{Bcr} = k_{Ch^*} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (4.51)$$

また, FEM計算結果における k_{ChFEM} は以下の通りに求めている.

$$k_{ChFEM} = \frac{\sigma_{BcrFEM}}{\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2} \quad (4.52)$$

$\delta > 0.409$ において平板理論では, 右側面が圧縮座屈を起こすのみであるので,

$k_{Ch} = k_C = 4.00$ である.

Fig. 4.7に, 4.2節の3面が同時に座屈すると仮定したときの1項近似した場合の式(4.48), 2項近似の場合の式(4.49), 上下面に強制変形を仮定して求めた式(4.50)から得られる値と, 式(4.52)によりFEMから逆算される k_{ChFEM} の値, 平板理論による値とを重ねて示す. Fig. 4.8には, 縦軸を拡大して式(4.50)と k_{ChFEM} のみを示している.

4.6.3 考察

当然ながら, 平板理論による結果とFEMの結果とには差が見られた. この要因は, 単純な平板理論で隣接する面の影響を考慮していないことである.

3面で同時に座屈が発生すると考えた場合のうち、1項近似である式(4.48)では曲げによる仕事 W_B を無視することになる。そのため、Fig. 4.7からわかるように、上下面の曲げの影響が大きい領域、すなわち δ が小さい領域でFEM結果との差が大きくなっている。2項近似である式(4.49)では曲げ座屈の影響を考慮することが可能であるため、1項近似に比べると $\delta=0.4$ 近くで値が改善されていることがわかる。このことから考慮する項数を増やすことによって、 δ がおおよそ1.6より小さいときの座屈応力係数 k_{ch} の値を改善することが可能と考えられる。また $\delta>1.6$ においては、1項近似と2項近似の差がなくなっており、このことからこの領域では、考慮する項数に影響されないことがわかる。それでもFEM結果との差が大きいままであるが、この要因は上下面に式(4.6)に示す曲げ座屈変形を仮定したことが要因と考えられる。Fig. 4.4からわかるように、 $\delta=2.5$ 近くにおいて上下面の座屈変形はほとんど見られず、仮定を満たしていないことが明らかである。なお、3項以上を考慮した場合、解析的に k_{ch} を求めることは困難であり、また求め得たとしても簡便な式とはならず、実用性に乏しい可能性が考えられる。

圧縮面の座屈を考慮した式(4.50)の結果は、FEMによる結果に対して $\delta=0.409$ のときに最大誤差14%であった。 δ がその適用下限値である0.409に近いほど誤差が大きくなっている。この理由として、上下面が強制変形の仮定を

充分には満たさないことが考えられる。すなわち、0.409に近いほど上下面は平板の曲げ座屈モードの影響を受けるようになり、そのため強制変形として仮定して求めた変形形状が、実際の座屈変形と大きく異なっていると考えられる。

式(4.50)と(4.51)により求められる座屈応力と、4.6.1項で示したFEM計算による座屈応力の計算例 (Fig. 4.6) とを重ねてFig. 4.9に示す。この図から、本章で示した手順により FEMと充分に対応する座屈応力を得ることが可能であることがわかる。

また式(4.50)から、座屈応力係数 k_{ch} は δ のみの関数となっており δ に対して一つの曲線で表されることがわかる。すなわち、本論文での結果からの知見として、Fig. 4.8に示すFEMによる結果に対応するような平易な近似曲線を見出せば、式(4.50)の代用として利用することが可能であることがわかる。

本論文では、材料を完全弾性体としているが、例えばFig. 4.9において $\delta=0.4$ では座屈応力が1250MPaを越えているため、材料によっては座屈が発生する前に塑性域に到達することがある。当然ながら、座屈荷重を越えて耐力（最大荷重）を求めるためには、降伏応力や塑性域の現象について考慮する必要がある。

4.7 まとめ

本章では、箱形断面梁の曲げ座屈に関して、エネルギー法に基づいてその座

屈応力を求めることを試みた。圧縮または曲げを受ける3面で座屈が発生すると仮定した場合、および圧縮面のみ座屈し、隣接する2面は強制変形すると仮定した場合とに関して、座屈応力係数の導出を試み、その精度をFEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較検証した。その結果、以下の結論を得た。

(1) 3面で座屈が発生すると仮定して定式化した結果、FEM計算結果と大きな差が

見られた。この差の要因は、曲げ応力が作用する2つの面に対して仮定した座屈変形がFEM計算結果とは大きく異なることである。

(2) 曲げ面は圧縮面の座屈に伴い強制的に変形されると仮定して定式化した結果、

FEMによる結果との誤差は最大14%であるが、実用的な座屈応力係数を求める式を導出できた。

本章での解析から得られた知見の一つとして、曲げモーメントによる箱形断面梁の座屈応力係数は、断面のアスペクト比のみの関数であることが明確となった。このことより、適切な近似曲線を見出せば、FEM計算による結果との差を埋めることが可能である。

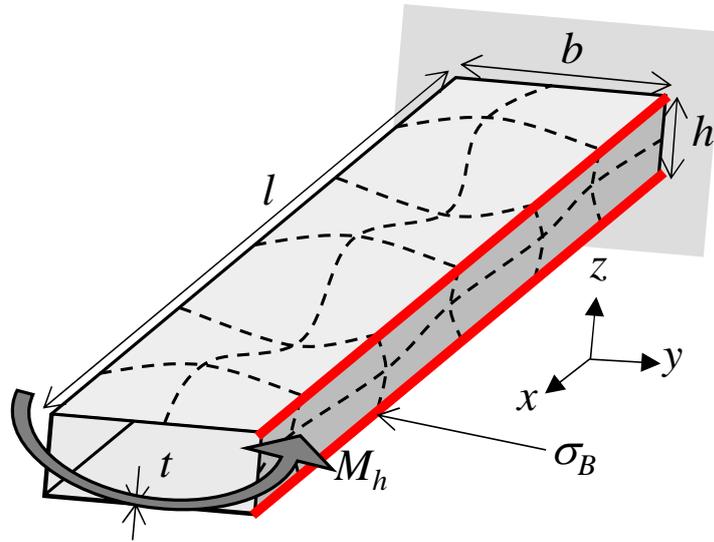


Fig. 4.1 Schematic view of box beam for bending.

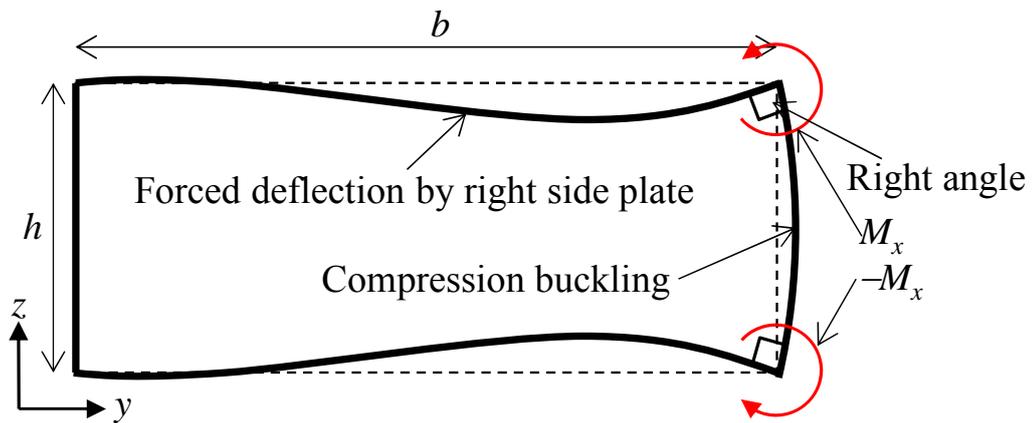


Fig. 4.2 Schematic view of deflection of cross-section of box beam in case of $h/b > 0.409$.

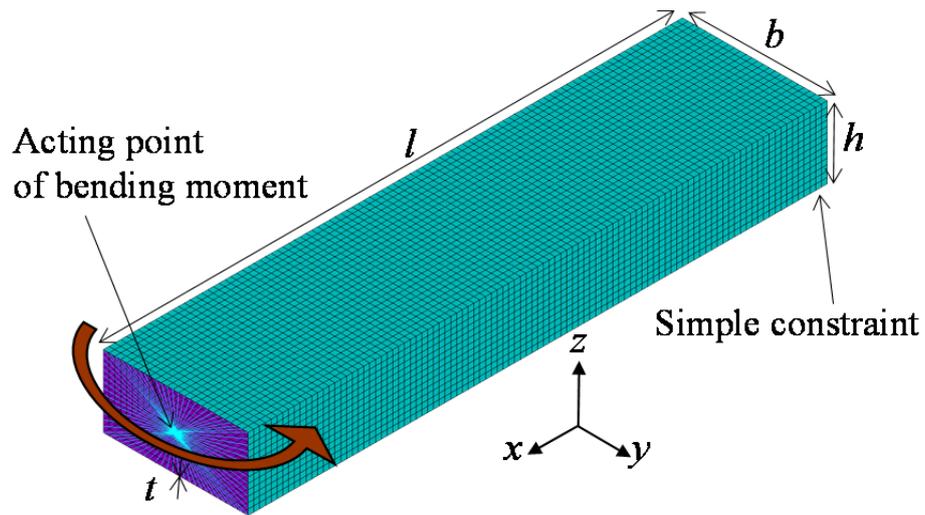


Fig. 4.3 Outline of finite element model of box beam.

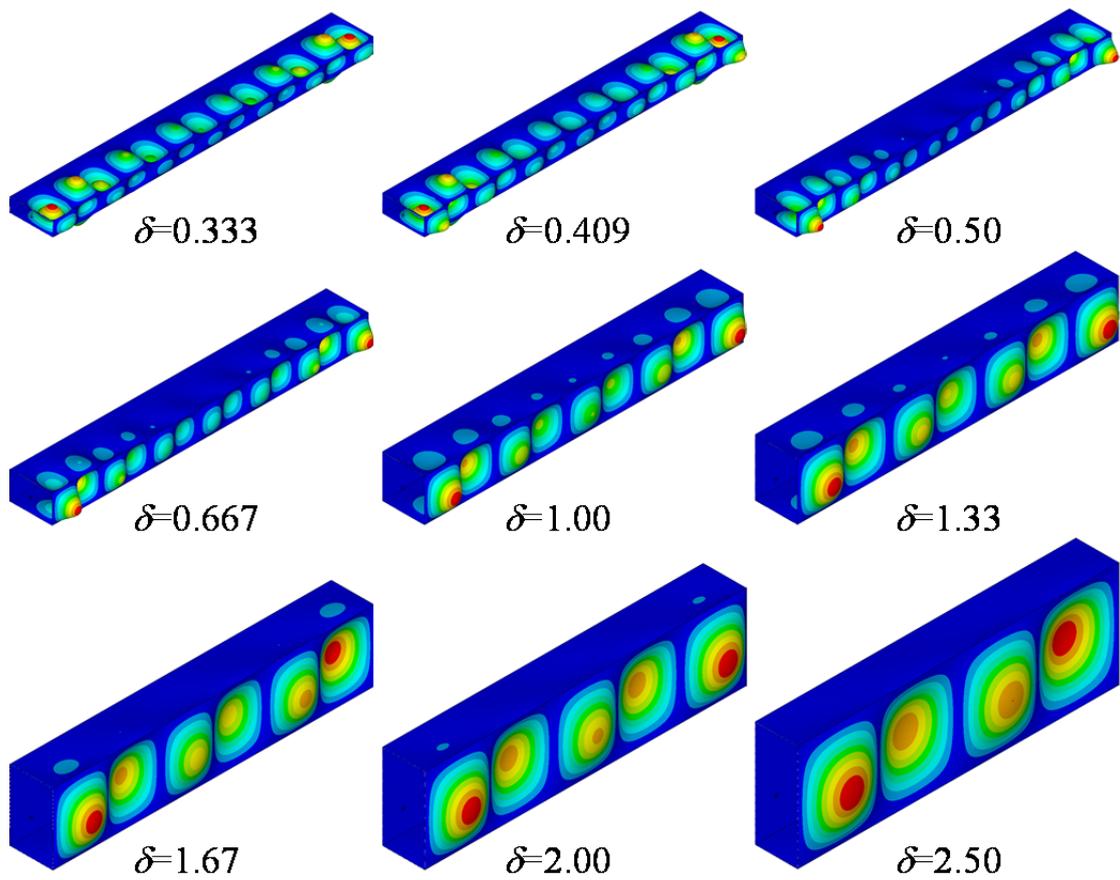


Fig. 4.4 Example results of bending buckling mode by FEM
 ($l=450, b=60, h=20\sim 150, t=1.0$ mm).

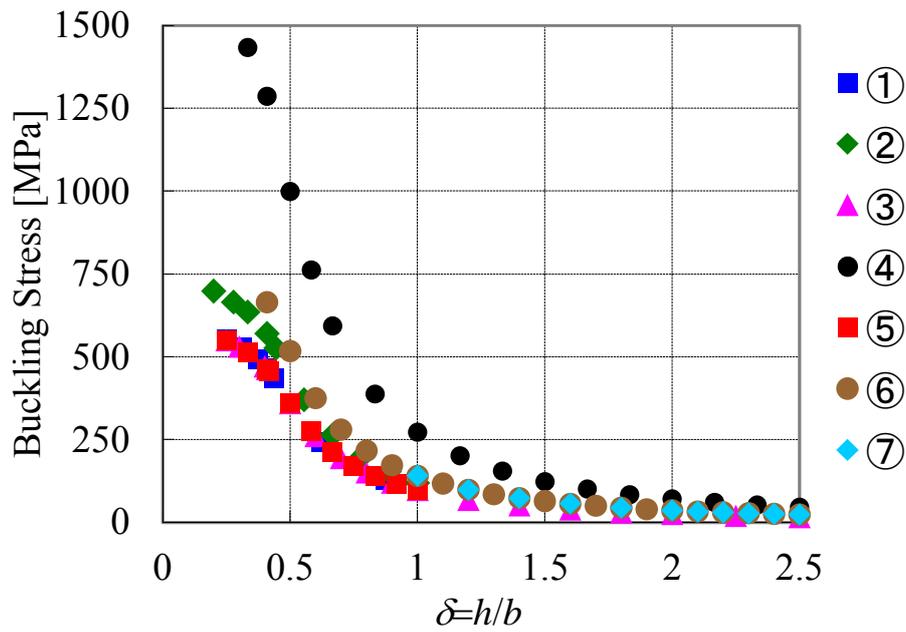


Fig. 4.5 Bending buckling stress of all dimensions by FEM.

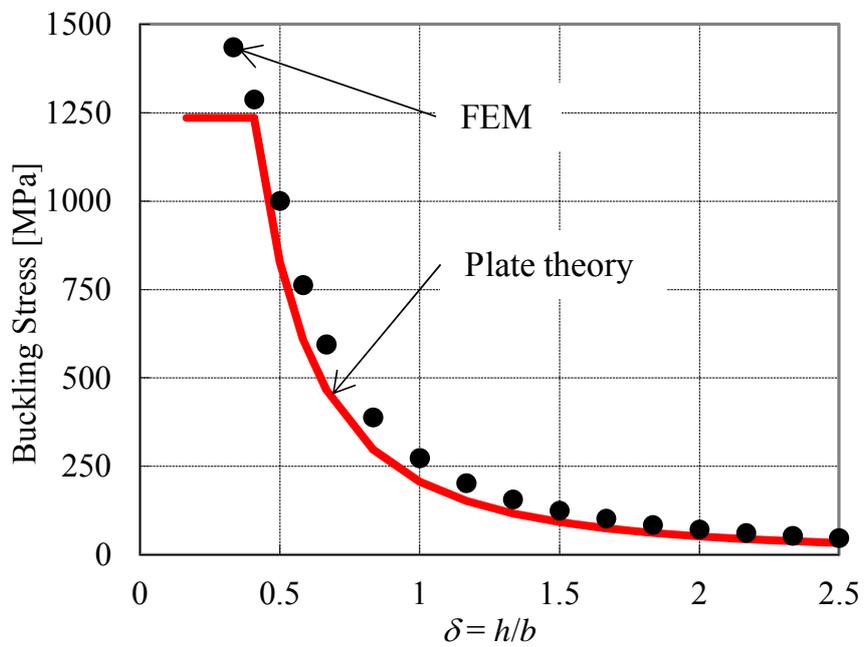


Fig. 4.6 Comparison of bending buckling stress by FEM, and Plate theory.

($l=450$, $b=60$, $h=20\sim 150$, $t=1.0$ mm)

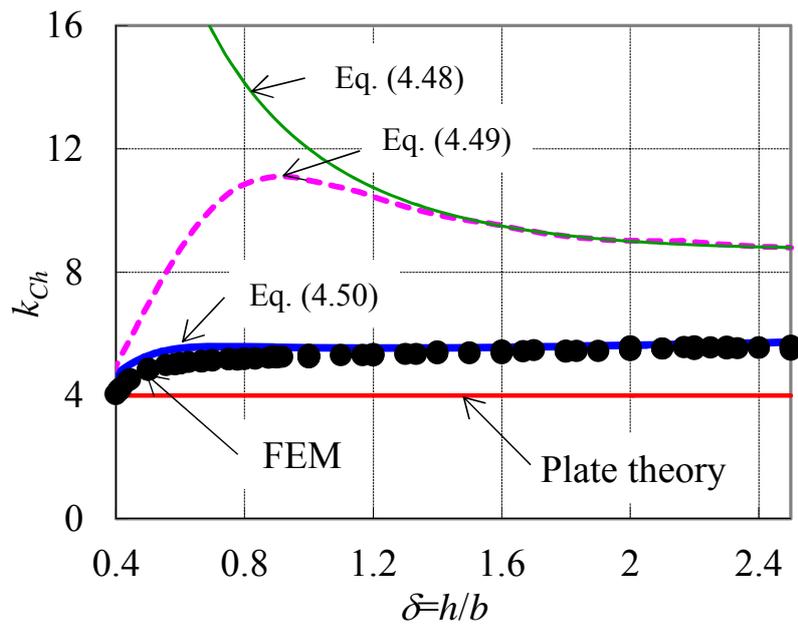


Fig. 4.7 Comparison of buckling stress coefficients derived by all equations from energy method with FEM results and plate theory.

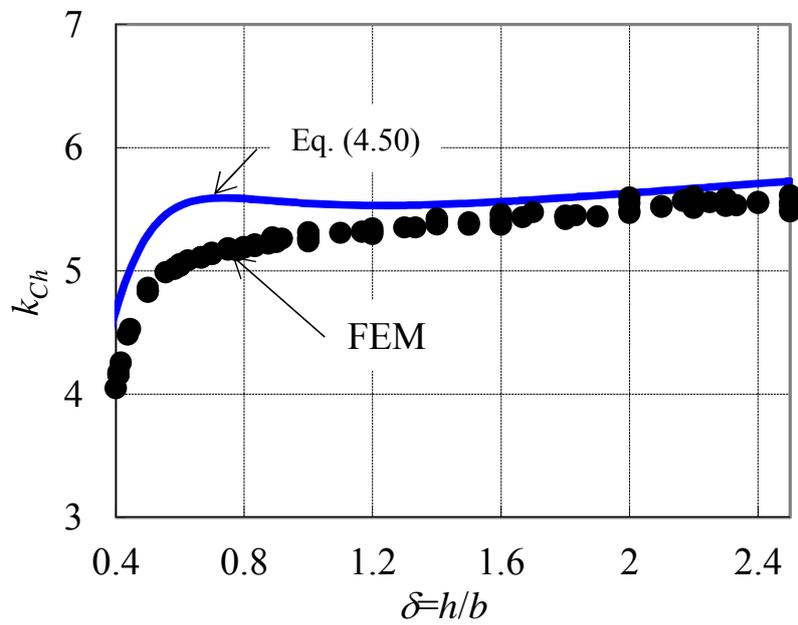


Fig. 4.8 Comparison of buckling stress coefficients from equation (4.50) and FEM.

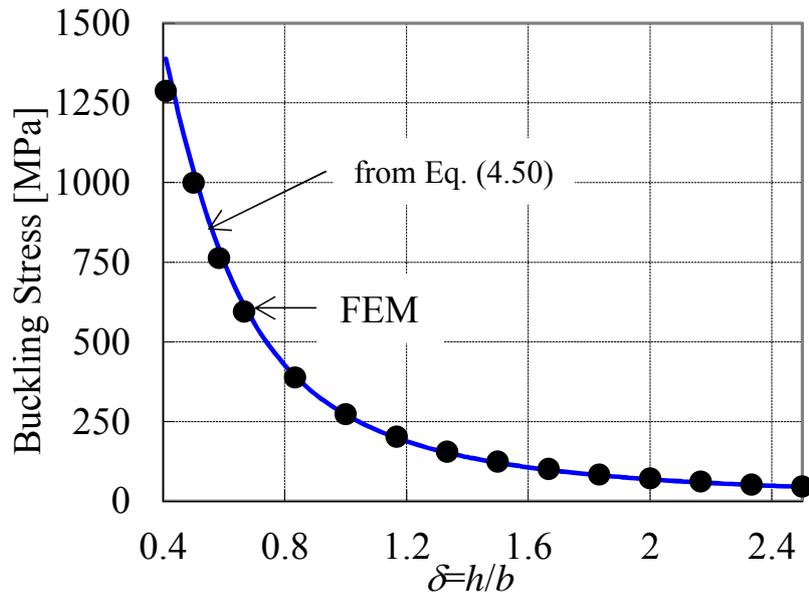


Fig. 4.9 Comparison of buckling stress example using equation (4.50) with FEM results.

($l=450$, $b=60$, $h=24.5\sim 150$, $t=1.0$ mm)

Table. 4.1 Dimension of finite element model of box beam [mm]

| Label | Length (l) | Width (b) | Thickness (t) | Height (h) |
|-------|----------------|---------------|-------------------|----------------|
| ① | 300 | 80 | 0.8 | 20~100 |
| ② | 300 | 90 | 1.0 | 18~100 |
| ③ | 400 | 100 | 1.0 | 10~250 |
| ④ | 450 | 60 | 1.0 | 10~150 |
| ⑤ | 500 | 120 | 1.2 | 30~120 |
| ⑥ | 600 | 100 | 1.2 | 40~250 |
| ⑦ | 700 | 100 | 1.2 | 100~250 |

第5章 圧縮とねじりが複合した座屈

5.1 過去の研究と本章の目的

任意の外力に対する座屈後挙動や耐力を求めるためには、圧縮荷重、曲げモーメント、ねじりトルクが複合した場合の座屈現象を把握する必要がある。複合荷重が作用する場合の平板に関する座屈応力関係式は、多くの書籍 (Ziemian, 2010, 宇佐美編, 2005) に記載されている。しかし、これらの関係式の中には、平板の座屈の基礎方程式から求められた厳密解の回帰式として求められており、その導出の手順がはっきりとしていないものがある。さらにまた、箱形断面梁のような複数の平板で構成された構造物の場合、単一平板と異なり、隣り合う面との連成を考慮する必要があるため、平板の結果をそのまま適用することが難しいことも考えられる。

そこで本章では、まず平板における座屈応力関係式に関して考察し、それらの公知の関係式の類似性に言及する。次に、箱形断面梁の軸方向圧縮力とねじりトルクが複合する場合の圧縮とせん断の座屈応力関係式を提案する。そして、これらの提案した式をFEMによる結果と比較し、式の妥当性を検討する。

なお、長方形平板の圧縮、せん断および曲げ座屈に関する既知の基礎式、座屈応力関係式に関しては、第2章を参照されたい。

5.2 エネルギー法に基づく平板の複合荷重時の座屈応力関係式

本節では、2つの応力が作用する場合の平板の座屈応力関係式について検討する。エネルギー法により得られる座屈固有方程式を低次数の項で近似することにより公知の関係式が得られることを示し、それとともに座屈応力関係式の類似性に言及する。

5.2.1 圧縮とせん断

Fig. 5.1において圧縮とせん断の応力が作用する場合、境界条件を4辺単純支持とすると、座屈による面外変位 w は以下の通りに書き表すことができる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.1)$$

座屈による歪みエネルギーを U 、圧縮による仕事を W_C 、せん断力による仕事を W_S として、

$$U = 2 \times \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (5.2)$$

$$W_C = \frac{t}{2} \int_0^b \int_0^l \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (5.3)$$

$$W_S = -t \int_0^b \int_0^l \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.4)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (5.5)$$

となる．これらに式(5.1)を代入し積分を実行すると以下の結果が得られる．

$$U = \frac{\pi^4 Dbl}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 C_{mn}^2 \quad (5.6)$$

$$W_C = \frac{\pi^2}{8} \sigma t \frac{b}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mC_{mn})^2 \quad (5.7)$$

$$W_S = 4\tau t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \frac{mnijC_{mn}C_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} \quad (5.8)$$

これらより，エネルギー停留条件

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}} (U - W_C - W_S) = 0 \quad (5.9)$$

を満たす2つの応力が，圧縮とせん断が複合した場合の座屈応力である．上式よ

り，以下の係数 C_{mn} に関する以下の連立方程式が得られる．

$$\left[\frac{(m^2 \beta^2 + n^2)^2}{\beta} - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} \beta m^2 \right] C_{mn} - \frac{32}{\pi^2} \frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\sigma_e} \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \frac{mnijC_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} = 0 \quad (5.10)$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad \beta = \frac{b}{l} \quad (5.11)$$

ただし， $\hat{\sigma}'_{cr}$ と $\hat{\tau}'_{cr}$ は座屈時の各応力成分であり， i および j に関しては， $m+i$ ， $n+j$ が奇数のときのみの総和をとる．せん断応力単独の場合と同様に $m+n$ が偶数の時のみ考えて（林, 1966）上式を行列表記すると，以下の通りとなる．

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta} - \frac{\beta\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} & -\frac{4 \cdot 32\hat{\tau}'_{cr}}{9 \pi^2 \sigma_e} & 0 & \dots \\ -\frac{4 \cdot 32\hat{\tau}'_{cr}}{9 \pi^2 \sigma_e} & \frac{16(1+\beta^2)^2}{\beta} - \frac{4\beta\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} & \frac{4 \cdot 32\hat{\tau}'_{cr}}{5 \pi^2 \sigma_e} & \dots \\ 0 & \frac{4 \cdot 32\hat{\tau}'_{cr}}{5 \pi^2 \sigma_e} & \frac{(9+\beta^2)^2}{\beta} - \frac{\beta\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{13} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.12)$$

C_{mn} の係数行列式=0より、座屈発生時の応力関係式が得られる。式(5.12)において十分な数の項数を考慮すれば厳密な関係式が得られる。ここでは見通しをよくするために、 C_{11} 、 C_{22} の項のみを考えることにすると、以下の関係式が得られる。

$$\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{\beta} - \frac{\beta\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} \right] \left[\frac{16(1+\beta^2)^2}{\beta} - \frac{4\beta\hat{\sigma}'_{cr}}{\sigma_e} \right] - \left[-\frac{4 \cdot 32\hat{\tau}'_{cr}}{9 \pi^2 \sigma_e} \right]^2 = 0 \quad (5.13)$$

上式を変形して以下の通りに書き表すことができる。

$$\left[1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\frac{(1+\beta^2)^2}{\beta^2} \sigma_e} \right] \left[1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{4 \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta^2} \sigma_e} \right] - \left[\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\frac{9\pi^2}{32} \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta} \sigma_e} \right]^2 = 0 \quad (5.14)$$

上式が意味することは、無限次数で表される座屈時の面外変位を低次数の項のみで近似した場合に、各座屈応力が、

$$\tilde{\sigma}_{cr} = \tilde{k}_c \sigma_e, \quad \tilde{k}_c = \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \quad (5.15)$$

$$\tilde{\tau}_{cr} = \tilde{k}_s \sigma_e, \quad \tilde{k}_s = \frac{9\pi^2}{32} \beta^3 \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \quad (5.16)$$

と求められ、かつせん断と圧縮の座屈応力関係式が、

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\tilde{\sigma}_{cr}}\right) \left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{4\tilde{\sigma}_{cr}}\right) - \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\tilde{\tau}_{cr}}\right)^2 = 0 \quad (5.17)$$

と求められることである。上式において、上付きの「 \sim 」は暫定的な値であることを表す。

ここで例えば、 $\beta=1$ とすると、 $\tilde{k}_C=4$ となり厳密解の k_C (式(2.12)) と一致するが、 $\tilde{k}_S=11.10$ となり、林ら(1966)が指摘しているように、 $k_S=9.34$ (式(2.20)) と比較してあまり精度が良くない。そこで本論文では、誤差が大きい上式の $\tilde{\tau}_{cr}$ の代わりに、厳密解および高精度な解である式(2.20)を利用して、以下の通りに書き表す。

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}}\right) \left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{4\hat{\sigma}_{cr}}\right) - \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 0 \quad (5.18)$$

すなわち上式は、圧縮とせん断が複合する場合に、無限級数で表される座屈時の面外変形を低次数の項で近似したのちエネルギー法に基づいて得られる2次形式の座屈応力関係式を示している。結果として、公知の式(2.32)とは異なる式となった。

5.2.2 曲げとせん断

前項の考え方を踏襲して、本項では、Fig. 5.1の平板に対して純曲げ応力 σ_B とせん断応力 τ とが作用する場合について、その座屈応力関係式をエネルギー法を利用して求める。前項と同様に、座屈による面外変形を以下の通りとする。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.19)$$

平板の歪みエネルギーは式(5.2), せん断による仕事は式(5.4)であり, 曲げによる仕事は以下の通りである.

$$W_B = \frac{t}{2} \int_0^b \left[\sigma_B \left(1 - \frac{2}{b} y \right) \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] dy \quad (5.20)$$

これらの積分を実行して, 以下の結果が得られる.

$$U = \frac{\pi^4 D b l}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 C_{mn}^2 \quad (5.21)$$

$$W_S = 4\tau t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \sum_j \frac{m n i j C_{mn} C_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} \quad (5.22)$$

$$W_B = 2 \frac{b l}{\pi^2} \sigma_B t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{n j C_{mn} C_{mj}}{(j^2 - n^2)^2} \quad (5.23)$$

エネルギー停留条件

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}} (U - W_S - W_B) = 0 \quad (5.24)$$

より, 以下の係数 C_{mn} に関する以下の連立方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 l b^3}{4} \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 C_{mn} \\ & - 8 m n \hat{\tau}'_{cr} \sum_i \sum_j \frac{i j C_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} - 4 b l \hat{\sigma}'_{Bcr} \left(\frac{m}{l} \right)^2 \sum_j \frac{n j C_{mj}}{(j^2 - n^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

これを行列表記して

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2 \sigma_e (1+\beta^2)^2}{4\beta} & -\frac{8\beta \hat{\sigma}'_{Bcr}}{9} & 0 & \dots \\ -\frac{8\beta \hat{\sigma}'_{Bcr}}{9} & \frac{\pi^2 \sigma_e (4+\beta^2)^2}{4\beta} & \frac{32\hat{\tau}'_{cr}}{9} & \dots \\ 0 & \frac{32\hat{\tau}'_{cr}}{9} & \frac{\pi^2 \sigma_e (1+4\beta^2)^2}{4\beta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{21} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

が得られる。さらに、低次数の項 (C_{11} , C_{12} , C_{21}) のみを考慮して行列式を求めると、以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi^2 \sigma_e}{4\beta} \right)^2 (1+\beta^2)^2 (4+\beta^2)^2 (1+4\beta^2)^2 \\ & - \frac{64}{81} (1+4\beta^2)^2 \beta^2 \hat{\sigma}'_{Bcr}{}^2 - \frac{512}{81} (1+\beta^2)^2 \hat{\tau}'_{cr}{}^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\left[\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\frac{9\pi^2}{32\beta^2} (1+\beta^2)(4+\beta^2)\sigma_e} \right]^2 + \left[\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\frac{9\pi^2}{128\beta} (4+\beta^2)(4\beta^2+1)\sigma_e} \right]^2 = 1 \quad (5.28)$$

これより、前項と同様に以下の通りに考えることができる。

$$\tilde{\sigma}'_{Bcr} = \tilde{k}_B \sigma_e, \quad \tilde{k}_B = \frac{9\pi^2}{32\beta^2} (1+\beta^2)(4+\beta^2) \quad (5.29)$$

$$\tilde{\tau}'_{cr} = \tilde{k}_S \sigma_e, \quad \tilde{k}_S = \frac{9\pi^2}{128\beta} (4+\beta^2)(4\beta^2+1) \quad (5.30)$$

前項と同様に、このように近似した場合の応力座屈係数を求めると、 $\beta=1$ のとき $\tilde{k}_S = 17.35$ 、 $\beta = \frac{3}{2}$ のとき $\tilde{k}_B = 25.06$ となり、 $k_S = 9.34$ 、 $k_B = 23.9$ に比べて精度が良くない。したがって、 $\tilde{\sigma}'_{Bcr}$ を式(2.29)に、また $\tilde{\tau}'_{cr}$ を式(2.20)に置き換えることにより、曲げとせん断が複合する場合の以下の座屈応力関係式が求めら

れる.

$$\left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (5.31)$$

5.2.3 圧縮と曲げ

前項と同様にして本項では, Fig. 5.1の平板に対して圧縮応力 σ と純曲げ応力 σ_B とが作用する場合の座屈応力関係式をエネルギー法に基づいて求める. 平板の歪みエネルギーは式(5.2), 圧縮による仕事は式(5.3)であり, 曲げによる仕事は式(5.20)である. ただし本項では, x 軸方向の変位形に関して単一の正弦波で表すことができるため (林, 1966), 面外変位形 w を以下の通りとする.

$$w = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.32)$$

上式を式(5.2), 式(5.3), (5.20)に代入して, 以下の結果が得られる.

$$U = \frac{\pi^4 D b l}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 C_n^2 \quad (5.33)$$

$$W_C = \frac{\pi^2}{8} \sigma t \frac{b}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (m C_n)^2 \quad (5.34)$$

$$W_B = \frac{b l}{16} \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m \pi}{l} \right)^2 C_{mn}^2 + \frac{b l}{\pi^2} \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j \left(\frac{m \pi}{l} \right)^2 \frac{n j C_{mn} C_{mj}}{(j^2 - n^2)^2} \quad (5.35)$$

ただし, j に関する総和は前項と同様である. エネルギー停留条件

$$\frac{\partial}{\partial C_n} (U - W_C - W_B) = 0 \quad (5.36)$$

より，係数 C_n に関する以下の連立方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 Dbl}{4} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 C_n - \frac{\pi^2}{4} \sigma t \frac{b}{l} m^2 C_n \\ - \frac{bl}{8} \sigma_{Bt} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 C_n - 2 \frac{bl}{\pi^2} \sigma_{Bt} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sum_j \frac{njC_j}{(j^2 - n^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\frac{\pi^2}{4} \beta^2 \left(m^2 + \frac{n^2}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e C_n - \frac{\pi^2}{4} m^2 \hat{\sigma}'_{cr} C_n - 4 \hat{\sigma}'_{Bcr} m^2 n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{(j^2 - n^2)^2} C_j = 0 \quad (5.38)$$

これを行列表記すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} \left[\beta^2 \sigma_e \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 - m^2 \hat{\sigma}'_{cr} \right] & -\frac{8m^2}{9} \hat{\sigma}'_{Bcr} & \cdots \\ -\frac{8m^2}{9} \hat{\sigma}'_{Bcr} & \frac{\pi^2}{4} \left[\beta^2 \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e - m^2 \hat{\sigma}'_{cr} \right] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

となる．さらに，低次数の項 (C_1, C_2) のみを考慮して行列式を求めると，以

下の通りとなる．

$$\frac{\pi^2}{4} \left[\beta^2 \sigma_e \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 - m^2 \hat{\sigma}'_{cr} \right] \frac{\pi^2}{4} \left[\beta^2 \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e - m^2 \hat{\sigma}'_{cr} \right] - \left(-\frac{8m^2}{9} \hat{\sigma}'_{Bcr} \right)^2 = 0 \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e} \right] \left[1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e} \right] \\ - \frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}{}^2}{\left[\left(\frac{9\pi^2 \beta^2}{32m^2} \right) \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right) \sigma_e \right]^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

これより，前項と同様に以下の通りに考えることができる．

$$\tilde{\sigma}_{Bcr} = \tilde{k}_B \sigma_e \quad \tilde{k}_B = \frac{9\pi^2 \beta^2}{32m^2} \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right) \quad (5.42)$$

$$\tilde{\sigma}_{cr1} = \frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e, \quad \tilde{\sigma}_{cr2} = \frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e \quad (5.43)$$

m は座屈応力が最小となるように決まるから，式(5.42)は $m\beta = \frac{3}{2}$ として

$\tilde{k}_B = 25.06$ が得られるが，厳密解 $k_B = 23.9$ に対して若干精度が悪い．また，式

(5.43)で $m\beta = 1$ とすると，前者は，

$$\tilde{\sigma}_{cr1} = \frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e = 4\sigma_e = \hat{\sigma}_{cr} \quad (5.44)$$

となり，厳密解と一致する．後者は，

$$\tilde{\sigma}_{cr2} = \frac{\beta^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{4}{\beta^2} \right)^2 \sigma_e = 25\sigma_e = \frac{25}{4} \hat{\sigma}_{cr} \quad (5.45)$$

となる．以上より，圧縮と曲げの応力が作用する平板において，曲げに関して

精度のよい解(2.31)を用いて以下の座屈応力関係式が得られる．

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} \right) \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} \right) - \left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}} \right)^2 = 0 \quad (5.46)$$

5.2.4 座屈応力関係式の類似性

前節までに，圧縮とせん断，および曲げのうち二つの応力が作用する以下の平板の座屈応力関係式を示した．

$$\frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (5.47)$$

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}}\right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}}\right) - \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 0 \quad (5.48)$$

$$\left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (5.49)$$

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}}\right) \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}}\right) - \left(\frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}\right)^2 = 0 \quad (5.50)$$

本項では、これらの式の類似性を示す。表記を明解にするために

$$x = \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} \text{ or } \frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}, \quad y = \frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}} \text{ or } \frac{\hat{\sigma}'_{Bcr}}{\hat{\sigma}_{Bcr}}$$

とおく。すると、二つの応力が複合する場合の上の4つの式は以下のように書くことができる。

$$x + y^2 = 1 \quad (5.51)$$

$$(1-x) \left(1 - \frac{1}{4}x\right) - y^2 = 0 \quad (5.52)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (5.53)$$

$$(1-x) \left(1 - \frac{4}{25}x\right) - y^2 = 0 \quad (5.54)$$

これら4つの式を俯瞰して

$$(1-x)(1-cx) - y^2 = 0 \quad (5.55)$$

なる式を考えたとき、式(5.51)は、式(5.52)で $c=0$ 、 $c=1/4$ 、 $c=-1$ 、 $c=4/25$ に対応す

る。 c を変化させたときの式(5.55)のグラフの変化をFig. 5.2に示す。すなわち式

(5.55)は、一つのパラメーターを導入することにより、様々な複合荷重時の座屈応力関係式を総括して表しうることを示している。

$c = 1/4$ および $c = -1$, $c = 4/25$ に相当する式は、エネルギー法により得られた座屈固有方程式を基礎として求めているが、式(5.47)は理論解析により得られた座屈応力関係を回帰式として表したものであるため、 $c=0$ の場合の物理的な意味は明確ではない。しかし、構造や応力の種類によって適切な c が存在すると仮定すれば、 $c=0$ とすることも意味があり、 c の値を選択することにより、理論解析やFEM計算の結果に充分に対応する座屈応力関係式が得られると考えることができる。

5.2.5 平板の座屈応力関係式に関するまとめ

エネルギー法により得られる座屈固有方程式を低次数の項で近似することにより、複合荷重時の平板の座屈応力関係式を求めることができた。得られた式のうち、結果として公知の関係式と同じ式となる場合もあったが、異なる式となる場合もあった。しかし、それらの関係式には類似性があり、一つのパラメーターにより関連づけることができることを示した。

なお、本節で求めた関係式は、座屈変形が（1項のみの場合も含めて）正弦波級数で表されることを前提としている。したがって、荷重条件や境界条件によって座屈変形が正弦波で表されない場合には、適用できない可能性がある。た

だその場合でも、パラメーター c の値を変更することで簡便な近似式が得られると考えられる。

5.3 箱形断面梁の軸方向圧縮座屈

5.3.1 座屈応力係数の近似式

次節で、圧縮とねじりが作用する箱形断面梁の座屈応力関係式を検討するが、その前に、圧縮荷重単独の場合の座屈について記述する。2.6節で述べたように、倉内（1935a, 1935b, 1935c, 1935d）がFig. 2.11に示すような箱形断面梁の圧縮座屈の有用な解析結果を示しているが、その結果を解析的な式で表すことはできない。それに対して、3章のねじり座屈と同様な考え方から圧縮の座屈応力係数の簡便な近似式を求めることができる。以下にその手順の概略を記す。

周辺を単純支持とした箱形断面梁のねじり座屈時のせん断応力 τ_{cr} に関する基礎式は以下の通りである。

$$\tau_{cr} = g_s \sigma_g \quad (5.56)$$

$$g_s = 4.00 + 5.34 \frac{\frac{b}{l} + \frac{h}{l}}{\left(\frac{b}{l}\right)^3 + \left(\frac{h}{l}\right)^3} \quad (5.57)$$

$$\sigma_g = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (5.58)$$

圧縮の座屈応力に関して、まず平板の圧縮座屈応力 $\hat{\sigma}_{cr}$ を以下の通りに書き表す。

$$\hat{\sigma}_{cr} = k_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = k_c \left(\frac{l}{b}\right)^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 = \tilde{g}_c \sigma_g \quad (5.59)$$

$$\tilde{g}_c = k_c \left(\frac{l}{b}\right)^2 = 4.00 \left(\frac{l}{b}\right)^2 \quad (5.60)$$

σ_g は b に影響されない数であり、 \tilde{g}_c のみが b に影響される数となる。圧縮座屈応力は b と h の両方の影響を受けることから、ねじり座屈と同様に、この式中の $(l/b)^2$ の代わりに l/b と l/h に関して対称となるような式を適用すれば近似解が得られることが推定できる。ねじり座屈と同様に考えると、以下の形の修正座屈応力係数を仮定できる。

$$\sigma_{cr} = g_c \sigma_g \quad (5.61)$$

$$g_c = 4.00 \frac{\frac{b}{l} + \frac{h}{l}}{\left(\frac{b}{l}\right)^3 + \left(\frac{h}{l}\right)^3} \quad (5.62)$$

これより、

$$\sigma_{cr} = 4 \left\{ \frac{\frac{b}{l} + \frac{h}{l}}{\left(\frac{b}{l}\right)^3 + \left(\frac{h}{l}\right)^3} \right\} \left\{ \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \right\} = \frac{4}{1-\delta+\delta^2} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = k_c \sigma_e \quad (5.63)$$

$$\delta = \frac{h}{b} \quad (5.64)$$

として、圧縮の座屈応力係数の近似式は以下の通りとなる。

$$k_c = \frac{4.00}{1 - \delta + \delta^2} \quad (5.65)$$

5.3.2 比較と検証

Fig. 2.11に示される結果とFEMによる結果と比較して、近似式(5.65)の精度を確認する。Table 5.1に示す47種の諸元で座屈固有値解析を実施した。ヤング率 $E=205.8\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\mu=0.3$ とした。FEMソルバーとしてANSYSを用いた。4節点シェル要素 (SHELL181) を用い、要素の大きさはすべての諸元で縦横とも2.5mmとした。Fig. 5.4にFEMメッシュの一例を示す。圧縮力の作用点を片端部の断面の中心点とし、その中心点と端面上の全節点を関係づけ、端面に均一に圧縮荷重が作用するように設定した。対端は端面上の全節点の並進自由度を拘束している。

Fig. 5.5に、 $l=400$ 、 $b=100$ 、 $h=30\sim 100$ 、 $t=1.0\text{ mm}$ のときの、座屈モードのFEM計算結果の一例を示す。Fig. 5.6に、倉内のグラフを読み取って座屈応力係数に換算した結果、近似式(5.65)、およびFEMにより求めた圧縮座屈荷重から換算した結果を重ねて示す。

倉内の結果はFEMの結果とほぼ一致した。0.4以上の実用的なアスペクト比において、式(5.65)の結果はFEMによる結果との誤差がおよそ6%以内であった。すなわち、倉内の結果と比較して誤差は大きいですが、実用的なアスペクト比においては、簡便な計算式として式(5.65)を用いることが可能であることがわかった。

5.4 箱形断面梁の圧縮とねじりの座屈応力関係式

5.4.1 座屈応力関係式の候補

本節では、Fig. 5.7に示すような軸圧縮荷重 P とねじりトルク T が作用する場合の箱形断面梁の座屈応力関係式を検討する。長方形平板のせん断と圧縮の応力が作用する場合の座屈応力関係式は、一般に以下の式が知られている。

$$\frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} + \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (5.66)$$

また、エネルギー法に基づいた以下の式を5.2節で提案した。

$$\left(1 - \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\hat{\sigma}'_{cr}}{\hat{\sigma}_{cr}} \right) - \left(\frac{\hat{\tau}'_{cr}}{\hat{\tau}_{cr}} \right)^2 = 0 \quad (5.67)$$

ここで、 $\hat{\sigma}_{cr}$ は平板の圧縮座屈応力、 $\hat{\tau}_{cr}$ はせん断座屈応力であり、 $\hat{\sigma}'_{cr}$ と $\hat{\tau}'_{cr}$ は、圧縮とせん断が複合した場合のそれぞれの座屈応力成分である。

圧縮力 P とねじりトルク T が作用する箱形断面梁において、5.2節と同様にエネルギー法により近似的な座屈応力関係式を求めることが可能であるが、4面を考慮するため、簡便に取り扱うことができない。しかし、断面を構成する4枚の板には圧縮とせん断の応力が作用するため、平板と同様な関係があることが期待できる。そこで本節では、 σ_{cr} は倉内の結果 (Fig. 5.6) から求められる箱形断面梁の圧縮座屈応力、 τ_{cr} は式(5.56)、(5.61)から計算されるせん断座屈応力とし、

σ'_{cr} と τ'_{cr} は、軸圧縮とねじりが複合した場合の圧縮とせん断の座屈応力成分として、以下の2つの式を箱形断面梁の座屈応力関係式として検討の対象とし、FEM計算結果と比較して精度を検証する。

$$\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma_{cr}} + \left(\frac{\tau'_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (5.68)$$

$$\left(1 - \frac{\sigma'_{cr}}{\sigma_{cr}} \right) \left(1 - \frac{\sigma'_{cr}}{4\sigma_{cr}} \right) - \left(\frac{\tau'_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 = 0 \quad (5.69)$$

5.4.2 FEMとの比較

長さ l 、横幅 b 、縦幅 h 、板厚 t に対して、Table 5.2に示すような9種の諸元で座屈固有値解析を実施した。FEM計算における諸条件は前節と同じである (Fig. 5.4)。これらの箱形断面梁に対して、圧縮力とねじりトルクの比率を変化させて座屈固有値解析を実施した。ただし、圧縮荷重 P とねじりトルク T が作用するときの圧縮応力 σ とせん断応力 τ の比を、 ζ を用いて以下の通りとする。

$$\sigma : \tau = (1 - \zeta) : \zeta = \frac{P}{2(b+h)t} : \frac{T}{2bht} \quad (5.70)$$

$\zeta=0$ の時は純圧縮であり、 $\zeta=1$ の時は純ねじり（純せん断）となる。

FEM計算結果の一例として、 $l=400$ 、 $b=100$ 、 $h=50$ 、 $t=1.0$ mmのときの座屈モードをFig. 5.8に、横軸を応力の比率とした座屈応力の変化をFig. 5.9に示す。また、すべてのFEM計算結果から求められるそれぞれの応力の比と式(5.68)と(5.69)による曲線をFig. 5.10に重ねて示す。

5.4.3 考察

Fig. 5.10からわかるように、FEM計算結果に対しては、式(5.69)より式(5.68)の方が近い結果となった。式(5.68)に対するFEM結果のずれを以下の通りに定義して、Fig. 5.11に示す。

$$\text{Diff} [\%] = \left[\frac{\sigma'_{crFEM}}{\sigma_{crFEM}} + \left(\frac{\tau'_{crFEM}}{\tau_{crFEM}} \right)^2 - 1 \right] \times 100 \quad (5.71)$$

ただし、 σ_{crFEM} 、 τ_{crFEM} をそれぞれFEMから求めた圧縮単独およびねじり単独の座屈応力とし、 σ'_{crFEM} 、 τ'_{crFEM} を圧縮とねじりが複合した場合のFEM座屈固有値解析から求めた座屈応力成分とする。また、凡例の丸数字は、Table 5.2に示す構造諸元のLabelである。

Fig. 5.11を見ると、 $\zeta = 0.4$ の近傍で差やばらつきが大きくなっているが、このばらつきは梁の断面のアスペクト比 δ に影響されている。すなわち δ が1に近いほど、すなわち断面が正方形に近いほど式(5.68)との差が大きくなる。本章で対象とした箱形断面梁に対しては式(5.68)がより近い値を示す結果となったが、それでも式(5.68)とFEM計算結果とで最大で12%ほどの差があり、式(5.68)が実用的な精度であるとは言い難い。

2・5節で述べたように、圧縮とせん断の座屈応力関係式(5.68)および(5.69)は、パラメーター c を用いて、以下の式で表すことができる。

$$\left(1 - \frac{\sigma'_{cr}}{\sigma_{cr}} \right) \left(1 - c \frac{\sigma'_{cr}}{\sigma_{cr}} \right) - \left(\frac{\tau'_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 = 0 \quad (5.72)$$

上式で、 $c=1/4$ とすれば式(5.68)となり、 $c=0$ とすれば式(5.69)となる。前項で示した箱形断面梁の圧縮ねじり座屈に対しては、例えば $c=-1/4$ （最小自乗法により求めるならば、 $c=-0.249$ ）とすることによって、FEM計算結果に対して実用的な精度を有する関係式が得られる（Fig. 5.12）。

5.2節で言及したように、式(5.72)を導出する際、座屈変形が正弦波級数で表されることを前提としている。それに対し、Wittrick（1968b）は正弦波のみならず双曲線関数を含めた座屈変形を仮定して、無限長の正方形断面の梁の圧縮とねじりの座屈応力関係式を求めている。それによるとこの梁の関係式はFig. 2.12に示したように、平板における圧縮とせん断の関係式とは異なっており、かつ応力比 ζ がおよそ0.38より大きい場合と小さい場合とで座屈変形モードが異なるため、 $0 \leq \zeta \leq 1$ の関係式を1つの式で表せないことが記されている。このWittrickの結果を $c=-1/4$ の曲線およびFEMの結果の一部（ $l=400$, $b=100$, $t=1.0$, $h=50$ ($\delta=0.5$), 100 ($\delta=1$) mm) とをFig. 5.13に重ねて示す。このグラフから、梁の断面のアスペクト比 $\delta = h/b$ に関して、 δ が1に近いほどすなわち正方形に近いほどWittrickの曲線に近くなっており、扁平になるほど $c=-1/4$ の曲線に近いことがわかる。

以上より、箱形断面梁の圧縮ねじりにおいて、座屈変形モードが正弦波に近い場合には、平板の圧縮とせん断の座屈とは、式(5.72)で示したような類似性が

あると考えられる。ただし、構造の差異や荷重条件の差によって座屈変形モードが異なることが考えられ、どのような c の値が適切か、構造諸元におけるどのパラメーターが c に影響するかは明確ではない。

5.5 まとめ

本章では、まず単一平板の座屈応力関係式がエネルギー法に基づいて得られることを示した。次に、薄板で構成された箱形断面梁に軸圧縮力とねじりトルクが複合する際に、圧縮とねじりの座屈応力関係式を提案した。そして、その提案した近似式の精度をFEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較検証した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 座屈モードとして正弦波形状を仮定して、エネルギー法により得られる座屈固有方程式を低次数の項で近似することにより、複合荷重時の平板の座屈応力関係式を求めることができた。得られた関係式には類似性があり、一つのパラメーターにより関連づけることができることを示した。
- (2) 箱形断面梁の圧縮ねじり座屈に対する座屈応力関係式を提案したが、荷重比や断面のアスペクト比によって異なる関係式となることがわかった。

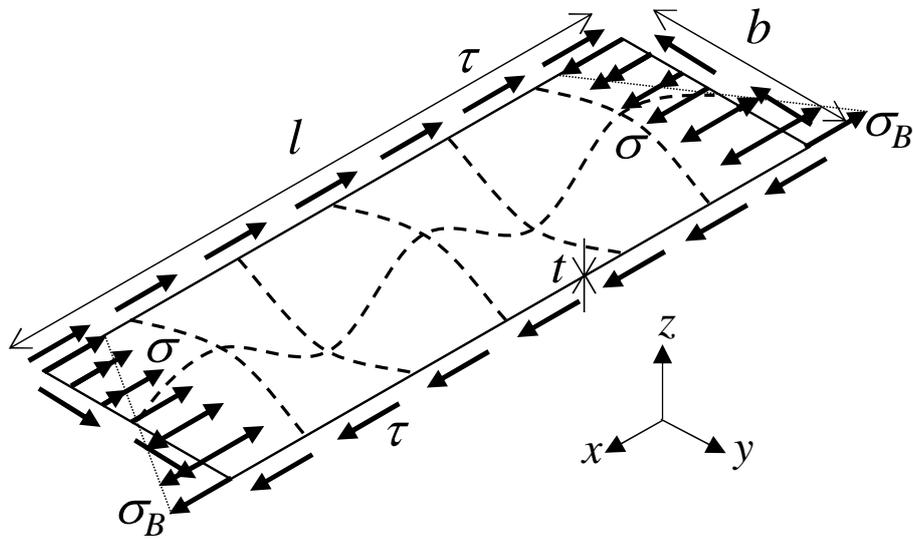


Fig. 5.1 Schematic diagram of rectangular plate for combined stress.

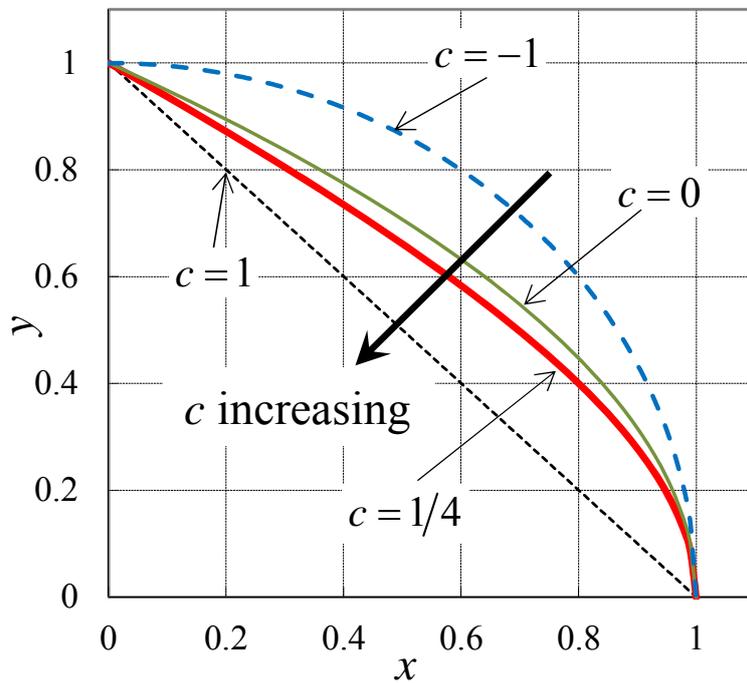


Fig. 5.2 Variation of buckling stress relation equations with parameter c .

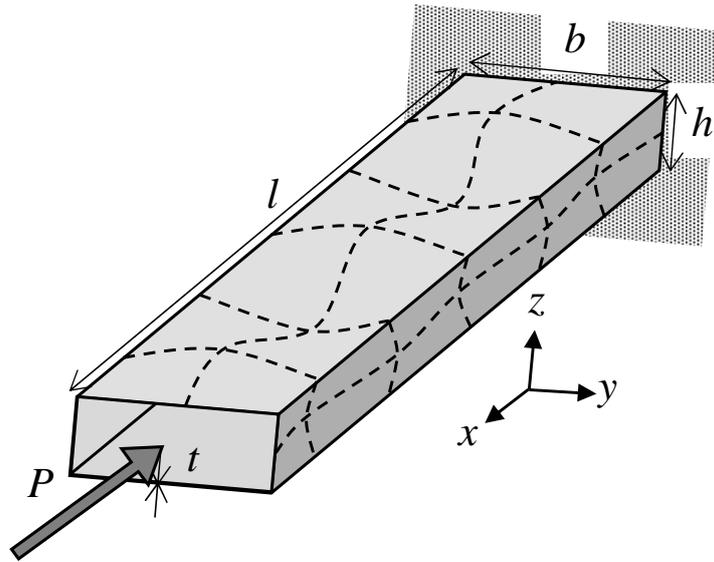


Fig. 5.3 Schematic view of box beam for compression.

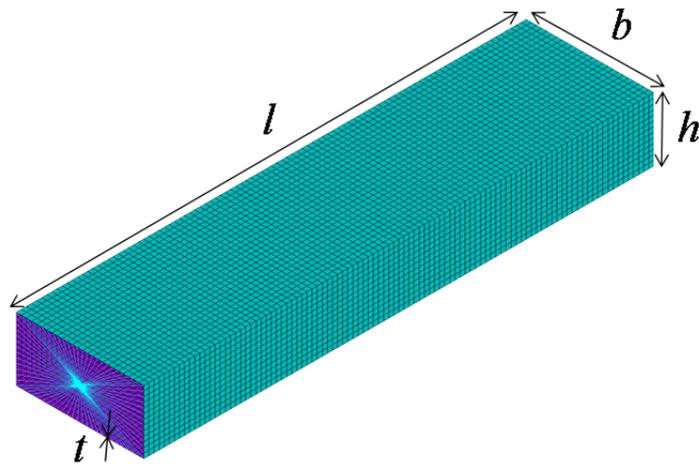


Fig. 5.4 Outline of finite element model of box beam.

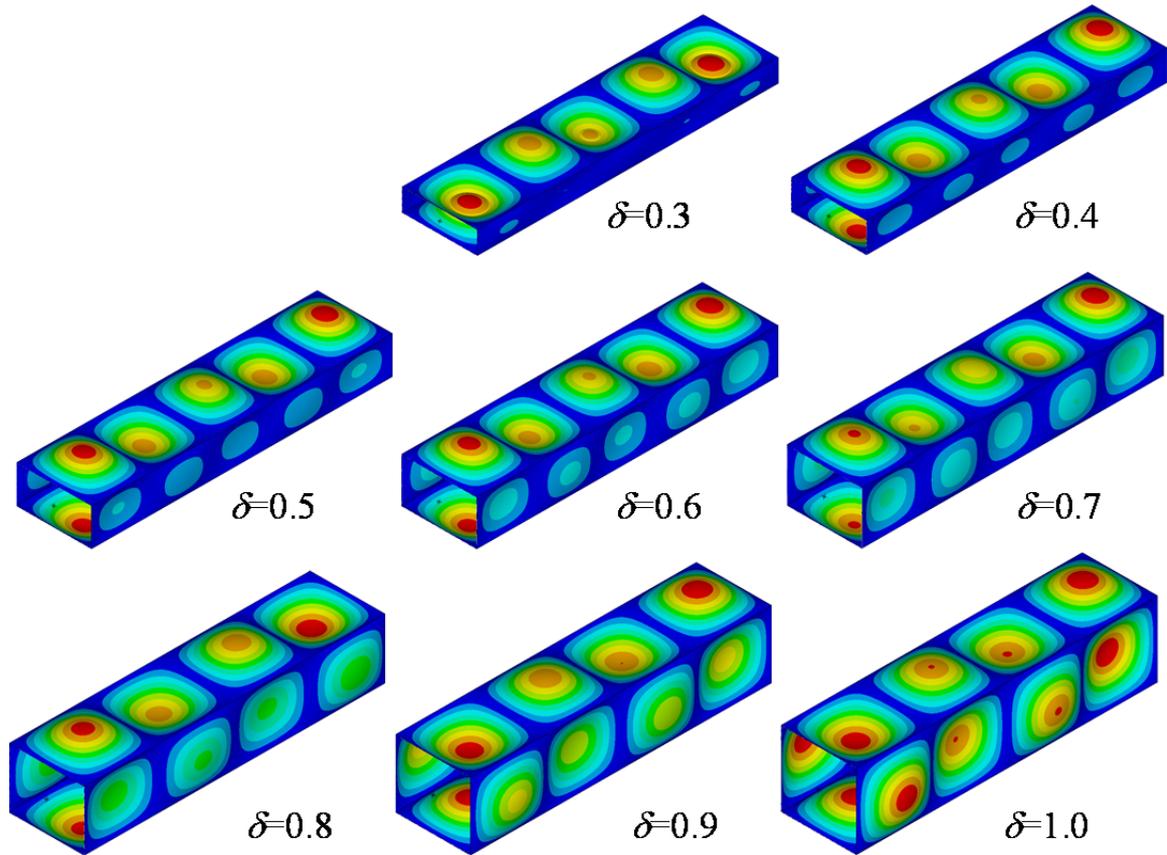


Fig. 5.5 Example of buckling mode by FEM
 ($l=400$, $b=100$, $h=30\sim 100$, $t=1.0$ mm).

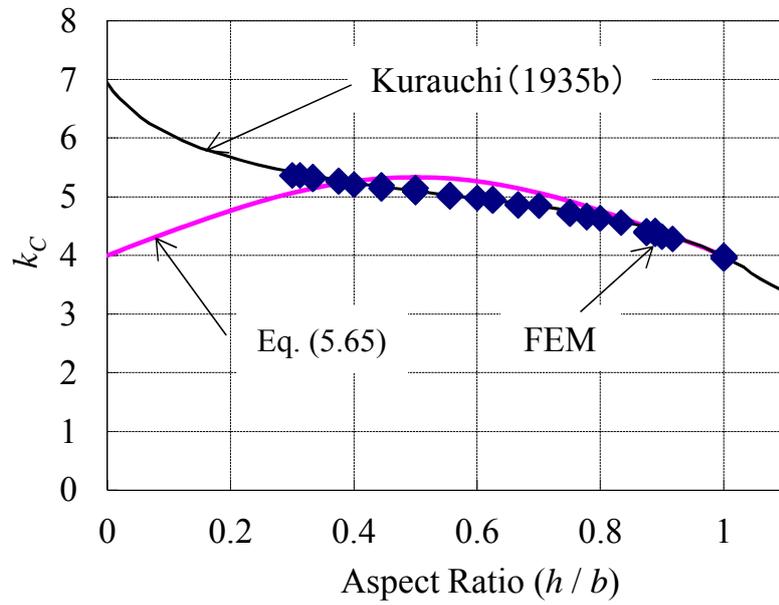


Fig. 5.6 Example of buckling mode by FEM

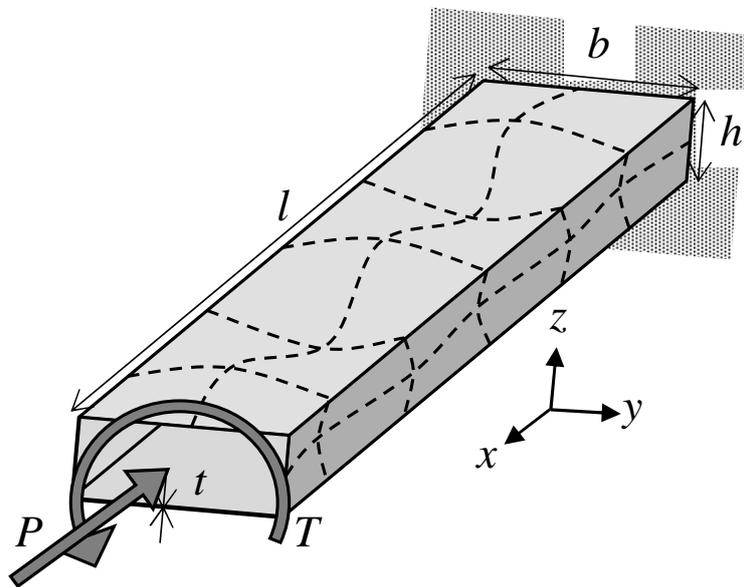


Fig. 5.7 Schematic view of box beam for compression and torsion.

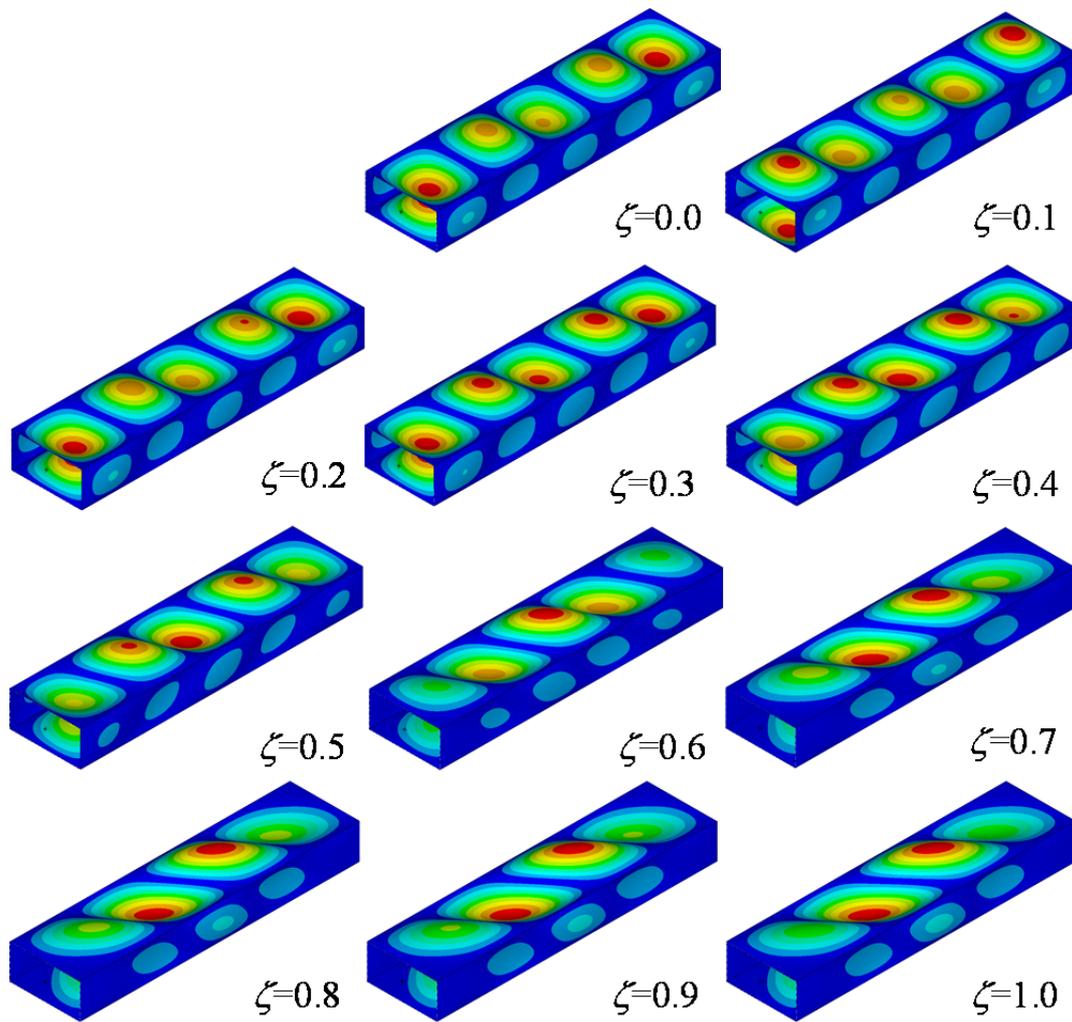


Fig. 5.8 Example of buckling mode by FEM
 ($l=400$, $b=100$, $h=50$, $t=1.0$ mm, $\zeta=0.0\sim 1.0$).

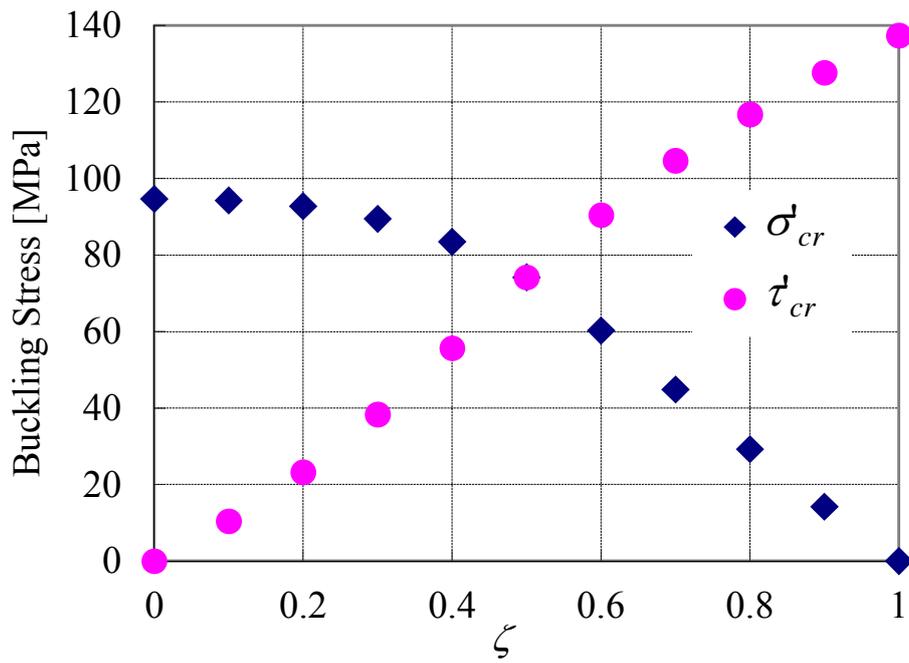


Fig. 5.9 Buckling stress along stress ratio by FEM
 ($l=400, b=100, h=50, t=1.0$ mm, $\zeta=0.0\sim 1.0$).

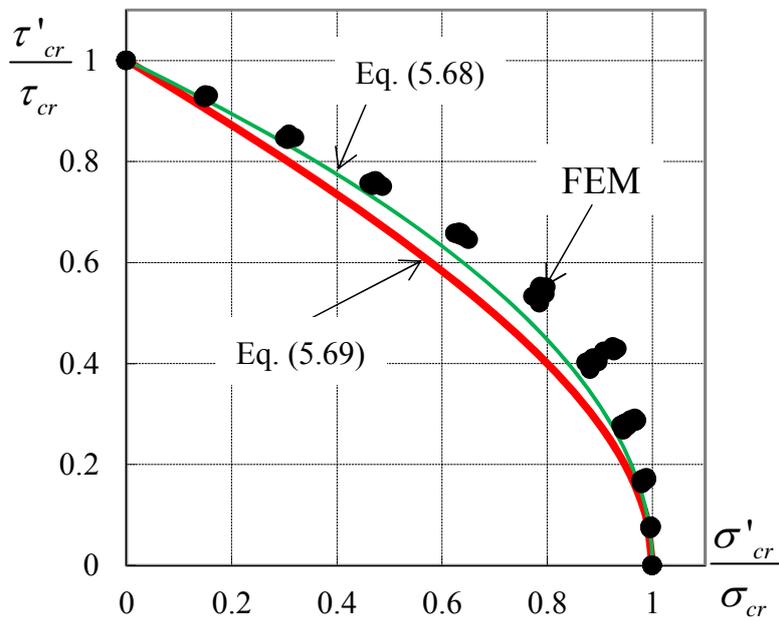


Fig. 5.10 Comparison of buckling stress relation equations with results from FEM.

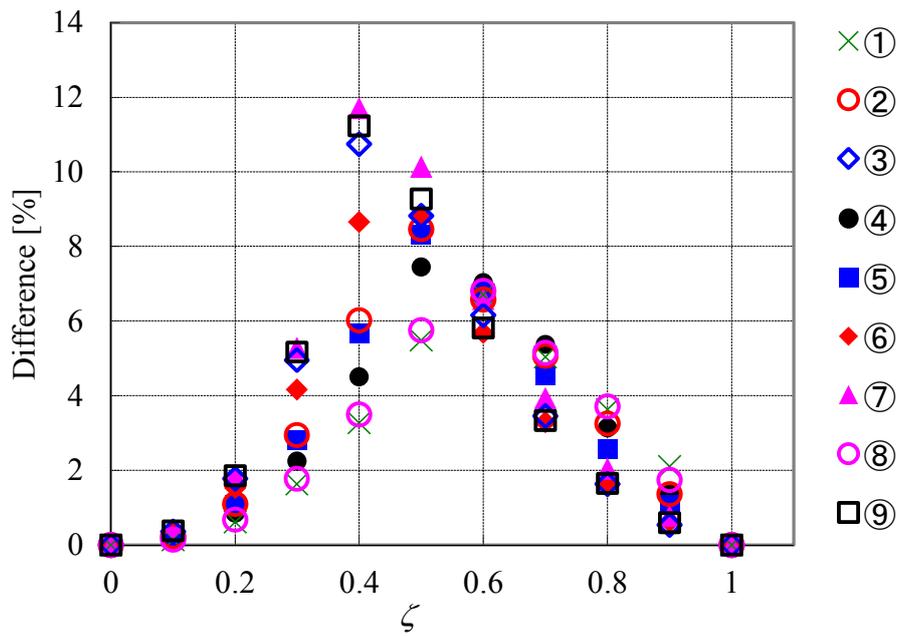


Fig. 5.11 Difference of stress ratio by Eq. (5.68) to results from FEM.

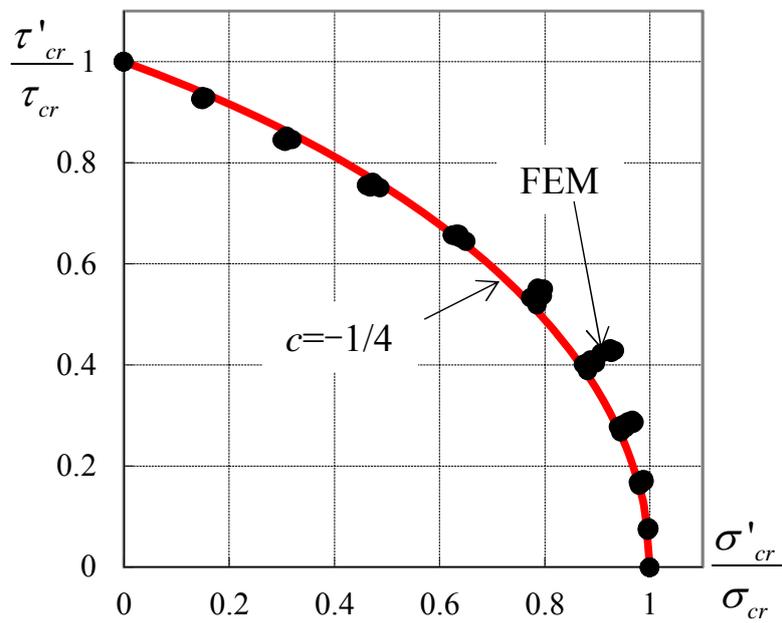


Fig. 5.12 Comparison of buckling relation equation with $c=-1/4$ with results from FEM.

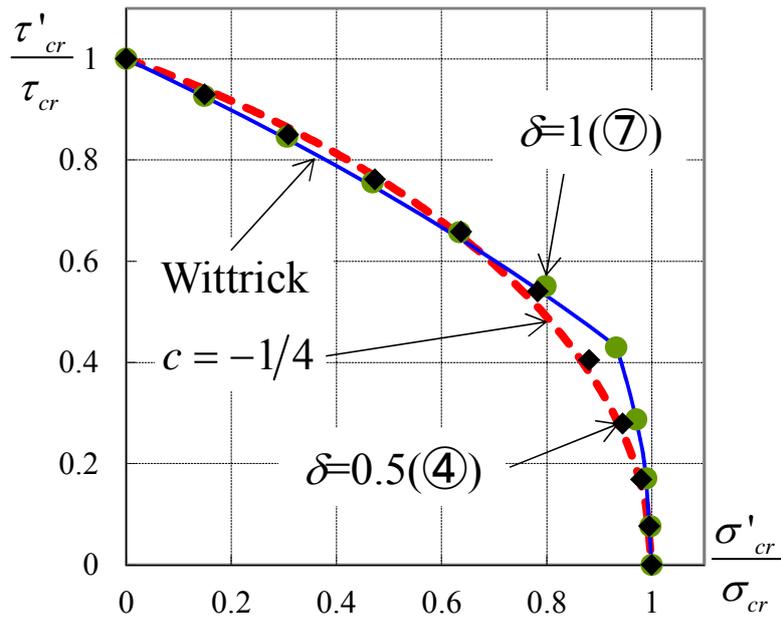


Fig. 5.13 Comparison of buckling relation equation with $c=-1/4$ and curve written by Wittrick (1968b) with results from FEM ($l=400, b=100, t=1.0, h=50$ ($\delta=0.5$, ④), 100 ($\delta=1$, ⑦) mm).

Table 5.1 Dimensions of finite element model of box beam for compression [mm]

| Length (l) | Width (b) | Thickness (t) | Height (h) |
|----------------|---------------|-------------------|---------------------------------|
| 300 | 80 | 0.8 | 30, 40, 50, 60, 70, 80 |
| | 80 | 1.0 | 30, 40, 50, 60, 70, 80 |
| | 90 | 1.0 | 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 |
| 400 | 80 | 1.0 | 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80 |
| | 90 | 1.0 | 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 |
| | 100 | 1.0 | 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 |
| 500 | 120 | 1.2 | 40, 60, 80, 100, 110, 120 |

Table 5.2 Dimensions of finite element model of box beam for compression and torsion [mm]

| Label | Length | Width | Height | Thickness |
|-------|--------|-------|--------|-----------|
| ① | 300 | 90 | 40 | 1.0 |
| ② | 300 | 90 | 60 | 1.0 |
| ③ | 300 | 90 | 80 | 1.0 |
| ④ | 400 | 100 | 50 | 1.0 |
| ⑤ | 400 | 100 | 60 | 1.0 |
| ⑥ | 400 | 100 | 80 | 1.0 |
| ⑦ | 400 | 100 | 100 | 1.0 |
| ⑧ | 500 | 120 | 50 | 1.2 |
| ⑨ | 500 | 120 | 110 | 1.2 |

第6章 結論

自動車車体の骨格は、自動車を形作り、安全性、剛性を担に根幹をなす重要部位である。この骨格は様々な外力を受けるが、その基本的な荷重を、軸圧縮力、ねじりトルク、曲げモーメントおよびそれらの複合荷重とみなすことができる。また近年、自動車の強度を向上させるため高強度鋼板の利用が多くなり、かつ軽量化のため鋼板が薄くなってきている。したがって、骨格部の耐力算出にあたっては、薄板で発生しやすい弾性座屈を考慮する必要がある。

そこで、自動車車体の骨格の初期概念設計において、弾性座屈を考慮した耐力の評価尺度を構築すること、およびその物理的背景を明確にすることが求められている。その過程の中で本論文では、車体の骨格の基礎的な構造として箱形断面梁を対象とし、それに作用する基本的な荷重に対する弾性座屈を求めることを主目的とした。特に、自動車構造開発にかかわる技術者が、簡便に座屈応力を求められるような式を導出することを重視して検討した。

荷重や構造諸元に基づいて導出される座屈の微分方程式に関して、通常、簡単な形の解を得ることができない。そこで、荷重状態や境界条件を考慮して座屈変形形状を与え、エネルギー法を利用して座屈応力を求めた。特に、変形を無限級数で与えた場合には、それを有限項で表すなどによって近似的に求めた。

そして、有限要素法（FEM）による計算結果を正解とみなして、求めた式の精度を検証した。

第3章では、箱形断面梁に対するねじり時のせん断座屈応力を求める方法を検討した。せん断座屈応力を近似的に求める式を提案し、FEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較して、提案した近似式の精度を検証した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) エネルギー法に基づいて求められる座屈の固有方程式から得られる知見を基にして、従来よりあるせん断座屈応力の式および座屈応力係数を、横板と縦板の幅を同時にかつ対称的に取り扱うことができる形に変更し、箱形断面梁のねじり座屈時のせん断応力を求める近似式を提案した。
- (2) FEMによる座屈固有値解析の結果と比較して、断面の実用的なアスペクト比が0.4~1の間において、誤差はおよそ5%以内であり、充分実用的な精度であることを確認した。

第4章では、箱形断面梁の曲げ座屈に関して、エネルギー法に基づいてその座屈応力を求めることを試みた。圧縮または曲げを受ける3面で座屈が発生すると仮定した場合、および圧縮面のみ座屈し隣接する2面は強制変形すると仮定した

場合とに関して、座屈応力係数の導出を実施した。得られた結果の精度をFEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較検証した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 3面で座屈が発生すると仮定して定式化した結果、FEM計算結果と大きな差が見られた。この差の要因は、曲げ応力が作用する2つの面に対して仮定した座屈変形がFEM計算結果とは大きく異なることである。
- (2) 曲げ面は圧縮面の座屈に伴い強制的に変形されると仮定して定式化した結果、FEMによる結果との誤差は最大14%であるが、実用的な座屈応力係数を求める式を導出できた。

第4章での解析から得られた知見の一つとして、曲げモーメントによる箱形断面梁の座屈応力係数は、断面のアスペクト比のみの関数であることが明確となった。このことより、適切な近似曲線を見出せば、FEM計算による結果との差を埋めることが可能である。

第5章では、まず単一平板の座屈応力関係式がエネルギー法に基づいて得られることを示した。次に、箱形断面梁に軸圧縮力とねじりトルクが複合する際に、圧縮とねじりの座屈応力関係式を提案した。そして、その提案した近似式の精度をFEMによる座屈固有値解析で求められる結果と比較検証した。その結果、

以下の結論を得た.

- (1) 座屈モードとして無限級数の正弦波形状を仮定して, エネルギー法により得られる座屈固有方程式を低次数の項で近似することにより, 複合荷重時の平板の座屈応力関係式を求めることができた. 得られた関係式には類似性があり, 一つのパラメーターにより関連づけることができることを示した.
- (2) 箱形断面梁の圧縮ねじり座屈に対する座屈応力関係式を提案したが, 荷重比や断面のアスペクト比によって異なる関係式となることがわかった.

本論文では, FEMを正解とみなして求めた式の精度を検証したが, 一般に実構造においては構造物の初期不整が避けられないため, FEM計算や理論値よりも座屈応力が低下することが知られている. したがって, 本論文で得られた結果を実験検証し, 実構造へ適用するにあたっては, 初期不整の影響を考慮することが必要である.

また, 本論文で述べたようなエネルギー法を用いて得られる解の精度を向上させるには, より適切な座屈変形を見出すことが重要である. ただし, 複雑な座屈変形を与えると, エネルギー法を利用しても簡便な形の解を得ることが難しい. さらに, 本研究の最終目標に向けては座屈後の荷重変位関係や応力を知

る必要があるが、これらは基本的に座屈変形に依存し、複雑な座屈変形から応力分布を簡単な式で表すことは容易ではない。

本研究の最終目標である弾性座屈を考慮した耐力算出法を構築し、実用に寄与するためには、上述の課題も含め、さらなる研究が必要とされている。

参考文献

AISI/CARS 2002, GAS (Geometric Analysis of Sections) (2002), American Iron and Steel Institute.

赤坂隆, 吉田均, 材料および構造技術者のための実用エネルギー法, 養賢堂, (2000).

邊吾一, 植村益次, 軸圧縮を受ける平板の座屈後の挙動, 東京大学宇宙航空研究所報告, 第12巻, 第2号 (1976), pp. 477 - 496.

Budiansky, B., Manuel Stein, Arthur C. Gilbert, Buckling of a long square tube in torsion and compression, NACA Technical Note 1751 (1948), NACA.

CARS Automotive Steel Design Manual Revision 6.1 (2002), pp. 3.1-2, American Iron and Steel Institute.

Chwalla, E., Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Trager, Der Stahlbau vol. 9 (1936), pp. 161 - 166.

長柱研究委員会編, 弾性安定要覧 第3版, コロナ社, (1961).

Column Research Committee of Japan (長柱研究委員会) (Editor), Handbook of Structural Stability (1971), Corona Publishing.

Dombourian, E. M., Smith, C. V., Jr., Carlson, R. L., A perturbation solution to a plate

postbuckling problem, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 11 (1976), pp. 49 – 58, Pergamon Press.

Gerard, G., Becker, H., *Handbook structural stability Part I – Buckling of flat plates*, NACA Technical Note 3781 (1957), NACA.

半谷裕彦, ” 平板の基礎理論”, 平板構造シリーズ 1, 彰国社, (1995).

林毅編, 軽構造の理論とその応用(上), JUSE出版社, (1966).

五十嵐規矩夫, 不均等曲げせん断力を受けるH形鋼梁の座屈耐力評価—周辺単純支持平板としての弾性座屈耐力評価—, 日本建築学会構造系論文集, No. 565 (2003a), pp. 135 – 141.

五十嵐規矩夫, 鈴木琢也, 不均等曲げせん断力を受ける周辺固定支持平板の弾性座屈耐力の導出, 日本建築学会構造系論文集, No. 571 (2003b), pp. 137 – 144.

五十嵐規矩夫, 鈴木琢也, 逆対称等曲げせん断力を受けるウェブ平板の弾性座屈耐力に及ぼす境界条件の影響, 日本建築学会構造系論文集, No. 571 (2003c), pp. 145 – 152.

五十嵐規矩夫, 鈴木琢也, 曲げせん断力および軸力を受ける平板の弾性座屈耐力評価法, 日本建築学会構造系論文集, No. 573 (2003d), pp. 209 – 216.

Iguchi, S., *Die Knickung der rechteckigen Platte durch Schubkrafte*, Ingenieur

Archiv, vol. 9 (1938a), pp. 1 – 12.

Iguchi, S., Die Knickung der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte durch Schubkräfte, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series, (1938b), pp. 814 – 832.

Johnson, Jr., A. E., Buchert, K. P., Critical combinations of bending, shear, and transverse compressive stresses for bucking of infinitely long flat plates, NACA Technical Note 2536 (1951), NACA.

von Karman, T., Sechler, E. E. and Donnell, L. H., The strength of thin plates in compression, Transactions ASME, Vol. 54 (1932), pp. 53-56.

木村衛, 小河利行, 清水英樹, 薄板の面内せん断挙動について, 日本建築学会構造系論文集, No. 543 (2001a), pp. 169 - 174, 日本建築学会.

木村衛, 井上哲郎, 谷口元, 橋村徹, 小松健, 薄板の座屈後耐力, 日本建築学会構造系論文集, No. 545 (2001b), pp. 135 – 140, 日本建築学会.

木村衛, 金属部材を構成する板要素の有効幅についての一考察, 日本建築学会構造系論文集, vol, 77, No. 673 (2012), pp. 437 – 442, 日本建築学会.

北田俊行, 中井博, 國廣昌史, 岸田和人, 圧縮, 2軸曲げ, および, ねじりを受ける薄肉箱形短柱の終局強度に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol. 37 A (1991), pp. 73 – 82.

小林繁夫, 近藤恭平, 弾性力学, 工学基礎講座7, 培風館, (1987).

小林繁夫, 増補新版 航空機構造力学, プレアデス出版, (2014)

近藤一夫, 平面張力場の一般解, 日本航空學會誌, Vol. 5 (1938), No. 41, pp. 285
- 299.

Kuhn, P., Stresses in Aircraft and Shell Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc.,
(1956).

倉西 正嗣, 軸圧縮を受ける薄肉平面壁プロファイル柱の各種のへし折れ強度と重
量最小の條件に就て, 造船協會會報, Vol. 1935 (1935a), No. 56, pp. 127 - 143.

倉西 正嗣, 軸圧縮荷重を受くる薄肉平面壁「プロファイル」柱の壁面へし折れ強
度(其の一), 日本航空學會誌, Vol. 2 (1935b), No. 3, pp. 55 - 86.

倉西 正嗣, 軸圧縮荷重を受くる薄肉平面壁「プロファイル」柱の壁面へし折れ強
度(其の二), 日本航空學會誌, Vol. 2 (1935c), No. 4, pp. 259 - 284.

倉西 正嗣, 軸圧縮荷重を受くる薄肉平面壁「プロファイル」柱の壁面へし折れ強
度(其の三), 日本航空學會誌, Vol. 2 (1935d), No. 5, pp. 485 - 508.

桑村仁, 建築の力学—弾性論とその応用—, 技報堂出版, (2001).

桑村仁, 鋼構造の性能と設計, 共立出版, (2002).

桑村仁, 建築の力学 塑性論とその応用, 井上書院, (2004).

Lundquist, E. E., Stowell, E. Z., Critical Compressive Stress for Flat Rectangular

- Plates Supported Along All Edges and Elastically Restrained Against Rotation along the Unloaded Edges, NACA Technical Report 733 (1942a), NACA.
- Lundquist, E. E., Stowell, E. Z., Critical Compressive Stress for Outstanding Flanges, NACA Technical Report 734 (1942b), NACA.
- Marguerre, K., The apparent width of the plate in compression, NACA Technical Memorandums No. 833 (1937), NACA.
- Mansfield, E. H., Tension field theory, Proceeding of 12th International Congress of Applied Mechanics (1968), pp. 305 – 320.
- 武藤清, 矩形ウェブ板の挫屈に関する研究—一般方程式の特性—, 建築学会論文集, No. 22 (1941), pp. 77 – 86.
- 中井博, 北田俊行, 國廣昌史, 仲村清孝, 岸田和人, 組合せ断面力を受ける薄肉箱形断面短柱の局部座屈を考慮した終局強度相関曲面に関する実験的研究, 構造工学論文集, vol. 36 A (1990), pp. 89 – 100.
- 日本機械学会編, 材料力学, 機械工学便覧基礎編α3, 日本機械学会, (2005).
- 日本機械学会, 材料力学, JSMEテキストシリーズ, 日本機械学会, (2007).
- 新沢順悦, 藤原源吉, 川島孝幸, 航空機の構造力学, 産業図書, (1989).
- 西村敏雄, 登坂宣好, 本間俊雄, 有限要素法による張力場解析手法について, 日本建築学会論文報告集, No. 351 (1985), pp. 76 – 83.

西村敏雄, 登坂宣好, 本間俊雄, 有限要素法による平面張力場解析, 日本建築学会論文報告集, No. 368 (1986), pp. 27 – 36.

Peters, R. W., Buckling tests of flat rectangular plates under combined shear and longitudinal compression, NACA Technical Note 1750 (1948), NACA.

Peters, R. W., Buckling of long square tubes in combined compression and torsion and comparison with flat-plate buckling theories, NACA Technical Note 3184 (1954), NACA.

酒井忠明, 力學問題に於けるEnergy法とGalerkin法に就いて, 北海道大學工學部彙報, vol. 1 (1948), pp. 167 – 185.

Schapitz, E., 石崎潑雄訳, 軽量構造の力学, コロナ社, (1966).

Schuette, E. H., McCulloch, J. C., Charts for the minimum-weight design of multiweb wings in bending, NACA Technical Note 1323 (1947), NACA.

柴田正和, 漸近級数と特異摂動法 微分方程式の体系的近似解法, 森北出版 (2009).

Southwell, R. V., Skan, S. W., On the stability under shearing forces of a flat elastic strip, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 105 (1924), pp. 582 – 607.

Stein, M., John Neff, Buckling stress of simply supported rectangular flat plates in shear, NACA Technical Note 1222 (1947), NACA.

Stein, M. Loads and deformations of buckled rectangular plates, NASA Technical Report R-40 (1959), NASA.

Stein, O., Stabilität ebener Rechteckbleche unter Biegung and Schub, Der Bauingenieur, vol. 17 (1936), pp. 308 – 311.

鈴木敏郎, 木村克次, 元結正次郎, 数値解析手法による薄板のせん断座屈後挙動に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 435, pp. 109 - 117, (1992).

Timoshenko, S. P., Theory of elastic stability, Second Edition (1961), McGraw-Hill Book Company, Inc.

Timoshenko, S. P.(著者), 長谷川節(訳者), 弾性安定の理論(Theory of Elastic Stability)上下巻, 理工学海外名著シリーズ, ブレイン図書出版, (1974).

土木学会鋼構造委員会編(委員長 宇佐美勉), 座屈設計ガイドライン, 鋼構造シリーズ12, p. 198, 丸善, (2005).

Way, S., Stability of Rectangular Plates Under Shear and Bending Forces, J. Appl. Mech. ASME, vol. 3, No. 4 (1936), pp. A131 - A135.

若杉昇八, 他, 周辺回転端直角二等辺三角形板の座屈, 日本機械学会論文集, Vol. 19 (1953), No. 83, pp. 59-65.

若杉 昇八, 他, 周辺支持正方形板の純粋せん断座屈後の挙動, 福井工業高等専

門学校研究紀要 自然科学, Vol. 3 (1970), pp. 57 - 64, 福井工業高等専門学校.

Winter, G., Performance of Thin Steel Compression Flanges, Preliminary publication, 3rd Congress, The International Association for Bridge and Structural Engineering, (1948).

Wittrick, W. H., Curzon, P. L. V., Stability functions for the local buckling of thin-walled structures in bending and compression, The Aeronautical Quarterly, pp. 327 - 351, November, (1968a).

Wittrick, W. H., Curzon, P. L. V., Local buckling of long polygonal tubes in combined compression and torsion, International Journal of Mechanical Science, vol. 10 (1968b), pp. 849 – 857, Pergamon Press.

八卷昇, 初期撓みをもつ矩形板の圧縮挫屈後の挙動 第1報 理論, 東北大学高速力学研究所報告, vol. 15 (1960), pp. 63 – 69, 東北大学高速力学研究所.

八卷昇, 初期撓みをもつ矩形板の圧縮挫屈後の挙動 第2報 実験, 東北大学高速力学研究所報告, vol. 17 (1961), pp. 19 – 35, 東北大学高速力学研究所.

吉識雅夫, 金沢武, 材料力学明解, 養賢堂, (1959).

Yu, Wei-Wen, COLOD-FORMED STEEL DESIGN, 3rd Edition, JOHN WILEY & SONS, INC., (2000).

Ziemian , R. D. ed., Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, Sixth
Edition (2010), pp. 128 - 145, JOHN WILEY & SONS, INC.

研究発表実績

古巢克也, 鶴見康昭, 中川稔章, 高木順, 弾性座屈を考慮した梁の断面特性(薄板で構成された梁の有効幅理論の検討), 第14回設計工学・システム部門講演会講演論文集, 日本機械学会, No. 04-38 (2004), pp. 344-347.

古巢克也, 尼子龍幸, 鶴見康昭, 西垣英一, 弾性座屈を考慮した梁構造物の剛性解析, 第16回設計工学・システム部門講演会講演論文集, 日本機械学会, No. 06-33 (2006), pp. 162-164.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 竹田英生, 浜辺勉, 張力場を考慮した長方形平板のせん断座屈後挙動, 日本機械学会, M&M2012 カンファレンス(2011), OS2315.

古巢克也, 尼子 龍幸, 中川 稔章, 竹田 英生, 浜辺 勉, 長方形平板のせん断座屈後挙動, 日本機械学会論文集A編, Vol. 78, No. 786 (2012a), pp.171-178.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 圧縮とせん断が複合した長方形平板の座屈に関する一考察, 日本機械学会, M&M2012カンファレンス(2012b), GS49.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 箱形断面梁のねじり座屈の近似解法, 日本機械学会論文集A編, Vol. 79, No. 801 (2013a), pp.573-581.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 箱形断面梁のねじり座屈の近似解法に関する一考察, 日本機械学会, M&M2013カンファレンス(2013b), GS34.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 箱形断面梁の圧縮座屈の近似解法, 日本機械学会, M&M2014カンファレンス(2014a), GS22.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 箱形断面梁の圧縮とねじりの複合荷重時の座屈応力関係式, 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 816(2014b), DOI : 10.1299/transjsme.2014smm0219.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, エネルギー法による箱形断面梁の曲げ座屈, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 828 (2015a), DOI:10.1299/transjsme.15-00115.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 箱形断面梁の圧縮とねじりの複合荷重時の座屈応力関係式に関する一考察, 日本機械学会, 2015年度年次大会(2015b), G0300501.

古巢克也, 尼子龍幸, 中川稔章, 浜辺勉, 青木典久, 圧縮を受ける平板の座屈が支配的な箱形断面梁の曲げ座屈, 日本機械学会, M&M2015カンファレンス(2015c), GS0106-119.

謝辞

本論文に関する研究を(株)豊田中央研究所における業務の中で実施し、成蹊大学にて学位を審査していただきました。

拙い文章や説明を紐解き、学位審査の主査の労を賜りました成蹊大学弓削康平教授，副査の労を賜りました横浜国立大学山田貴博教授，ならびに成蹊大学笠原和夫教授，酒井孝教授に感謝申し上げます。

遅々として進まない中を，叱咤激励とともに長年にわたり根気よく共同研究をしてくださったトヨタ自動車株式会社 浜辺勉様，青木典久様，竹田英生様に感謝申し上げます。研究の方向性に惑ったときに方向性を示してくださった豊田中央研究所 工学博士 中川稔章主席研究員，尼子龍幸主任技師に感謝申し上げます。有益な助言を賜り，研究業務を支えてくださった水谷義輝技師，高木順(元)技師，工学博士 岩田徳利主席研究員，工学博士 西垣英一主席研究員，博士(工学) 鈴木智博主任研究員に感謝申し上げます。学会や講演会の折，有益な助言，情報を賜りました愛媛大学 柳原大輔准教授，神奈川大学 高野敦准教授，ELDC 高岡秀年様に感謝申し上げます。

最後に，豊田中央研究所における研究生活を陰に日向に支えてくれた娘，息子，そして妻幸子に感謝します。

2016年3月 古巣克也